

# ESTIMACIÓN DE LAS PROPIEDADES ÓPTICAS DE LA VEGETACIÓN USANDO MEDIOS RADIATIVOS EQUIVALENTES Y ESPACIOS $n$ -PARAMÉTRICOS

## Estimation of Foliar Optical Properties from Vegetation using Equivalent Radiative Media and $n$ -Parametric Spaces

Fernando Paz Pellat<sup>1‡</sup>, Marcos Casiano Domínguez<sup>1</sup>, Alfonso Zarco Hidalgo<sup>1</sup> y Martín Bolaños González<sup>1</sup>

### RESUMEN

La estimación de las propiedades bioquímicas del follaje esta intrínsecamente acoplada a las propiedades estructurales de la vegetación, (índice de área foliar y cobertura de la vegetación) por lo que su estimación conjunta plantea un problema de solución matemáticamente indeterminado. Ante esa situación, en este trabajo se discute un esquema de solución que permite convertir un medio radiativamente heterogéneo (estimación de la parte estructural y bioquímica) a uno homogéneo (estimación solo de la parte bioquímica). Para poder operar el concepto de conversión de medios es necesario el uso del paradigma de medios equivalentes, los cuales requieren parámetros efectivos. La estimación de las reflectancias en el infinito (medios homogéneos) es discutida usando espacios  $n$ -paramétricos, bajo consideraciones de los problemas de estimación asociados a éstos (propagación de errores). La generalización a espacios supra-paramétricos es introducida como una forma de compactación de las dinámicas espectrales asociadas al crecimiento de la vegetación para un medio ambiente y manejo específico.

**Palabras clave:** espacios del  $R$  e  $IRC$ , medios homogéneos y heterogéneos, parámetros efectivos, dinámica espectral.

### SUMMARY

Estimation of biochemical properties of the vegetation canopy is intrinsically coupled to the structural properties

<sup>1</sup> Grupo de Gestión de Riegos y Recursos Naturales Asistida por Sensores Remotos. Colegio de postgraduados, Campus Montecillo. 56230 Montecillo, Estado de México.

<sup>‡</sup> Autor responsable (pellat@colpos.mx)

(leaf area index and vegetation coverage), so that their joint estimation poses a mathematically indeterminate problem to solve. In response, this paper discusses a solution scheme to convert radiatively heterogeneous medium (need to estimate the structural and biochemical parts) to a homogeneous (single estimate of the biochemical part). In order to operate the concept of media conversion, it is necessary to use the paradigm of equivalent media, which requires effective parameters. Estimating the infinite reflectances (homogeneous media) using  $n$ -parametric spaces is discussed considering the estimation problems (error propagation) associated therewith. The generalization to supra-parametric spaces is introduced as a way of compacting the spectral dynamics associated with vegetation growth for a specific operating environment.

**Index words:**  $R$  and  $NIR$  species, homogenous and heterogeneous media, effective parameters, spectral dynamic.

### INTRODUCCIÓN

La estimación de las propiedades ópticas de las hojas a partir de mediciones del follaje de diferentes tipos de vegetación, es importante para relacionarlo con las concentraciones de los constituyentes bioquímicos de las hojas, particularmente en el ámbito de la aplicación de la tecnología de sensores remotos. Esta tecnología, a nivel de campo o a bordo de satélites, permite la utilización de métodos no destructivos para la estimación de parámetros biofísicos o bioquímicos, asociados a los datos espectrales medidos de la vegetación u hojas. No obstante su atractivo, la aplicación operacional de los sensores remotos ha sido poco exitosa y plagada de aproximaciones empíricas que requieren la tarea constante de calibrar los métodos de cálculo para las estimaciones. La estimación de los constituyentes bioquímicos de las hojas ha sido explorada a través de métodos estadísticos (Jacquemoud *et al.*, 1995b); los

resultados obtenidos muestran correlaciones buenas entre los datos espectrales y la bioquímica, sin embargo, estas no son congruentes con las propiedades radiativas de las hojas, además de ser poco estables (Grossman *et al.*, 1996). Ante esta situación se ha planteado el desarrollo de modelos radiativos semi-teóricos que asocien las mediciones ópticas de las hojas con la bioquímica. El modelo PROSPECT (Jacquemoud y Baret, 1990; Jacquemoud *et al.*, 1996) ha sido desarrollado para estos fines y es actualmente uno de los más usados. El modelo PROSPECT utiliza la concentración de la clorofila a y b, del agua (espesor equivalente) y de la biomasa seca (proteína + celulosa + hemicelulosa + azúcares + almidones + lignina, principalmente); además de un parámetro relativo a la estructura del mesófilo foliar.

Las mediciones de reflectancias por sensores remotos ha sido utilizada para el desarrollo de numerosos índices espectrales de vegetación o IV, tanto a nivel de hojas (le Maire *et al.*, 2004) como de follaje (Broge y Leblanc, 2000). Los resultados de este enfoque han sido poco satisfactorios y poco estables fuera del conjunto de calibración. En el caso particular de la determinación de la bioquímica foliar en el follaje, la inversión de modelos radiativos acoplados de las hojas y del follaje también ha sido poco exitosa (Jaquemoud *et al.*, 1995a), algo similar ocurre en el caso del uso de los IV (Broge y Leblanc, 2000).

Recientemente, usando el marco teórico de los invariantes espectrales (Huang *et al.*, 2007), Lewis y Disney (2007) han demostrado en términos generales que dado el acoplamiento de las propiedades estructurales del follaje (índice de área foliar o IAF y cobertura o  $f_v$ ) con la bioquímica foliar no es posible realizar estimaciones robustas de ambas propiedades, sin importar lo angosto de las bandas espectrales usadas o el número de ellas. Cualquier estimación que se realice de ambas propiedades contendrá un error muy grande y representará un problema matemáticamente indeterminado (muchas soluciones al mismo problema). Así, la perspectiva de la estimación de las propiedades bioquímicas de las hojas usando datos espectrales del follaje de la vegetación parece tener una limitación fundamental e intrínseca.

El entendimiento de los patrones de los espacios espectrales asociados a las mediciones de reflectancias de la vegetación, sensores remotos o radiómetros de campo, permite el desarrollo de aplicaciones prácticas y robustas de esta tecnología en la estimación de

la biomasa aérea y rendimientos de los cultivos (Pascual *et al.*, 2012), cobertura de la vegetación o índice de área foliar (Paz *et al.*, 2007 y 2011; Reyes *et al.*, 2011), estrés en cultivos (Solorio *et al.*, 2008; Reyes *et al.*, 2011), entre otras aplicaciones. Para que el uso de la información espectral sea útil, dado que lo que se mide es función de una gran cantidad de variables, es necesario el desarrollo de esquemas de modelación genéricos, pero simples, que permitan obtener datos biofísicos con el mínimo de información (Paz *et al.*, 2009c). Las bases de esta aproximación son discutidas en este trabajo, bajo diferentes perspectivas.

El objetivo principal de este trabajo fue demostrar que la limitación definida por Lewis y Disney (2007), puede ser evitada usando el concepto de medio equivalente y espacios n-paramétricos, que hacen operacional el problema de convertir un medio heterogéneo (problema de acoplamiento estructura-bioquímica) a uno homogéneo (medio turbio en términos radiativos), donde el factor estructural es desacoplado del bioquímico. La propuesta, desarrollada a partir del planteamiento realizado por Paz *et al.* (2009 a y c), es ejemplificada con dos experimentos clásicos (maíz y algodón) de mediciones radiativas en cultivos, además de simulaciones radiativas. La presentación de simulaciones y datos de campo de experimentos controlados permite revisar la congruencia del marco teórico desarrollado, además de posicionar los problemas experimentales asociados a las mediciones en campo.

### Medio Radiativos Equivalentes

Dejando fuera el problema asociado a la geometría sol-sensor (función de distribución bidireccional de la reflectancia y su contraparte geométrica de la distribución de las plantas en una parcela o píxel) se introduce el concepto de medio radiativo equivalente, como un esquema operacional a la limitación asociada a la imposibilidad de conocer, en primera aproximación, los elementos constituyentes de un píxel en una imagen satelital, sin recurrir a hipótesis que no pueden ser validadas directamente.

En una parcela o rodal, el IAF estimado experimentalmente representa uno global:

$$IAF_G = \left( \frac{\text{área foliar promedio}}{\text{planta}} \right) \left( \frac{\text{número de plantas}}{\text{m}^2 \text{ de la parcela}} \right) \quad (1)$$

Sin considerar efectos de borde, el  $IAF_l$  o local (plantas individuales) esta relacionado con el global como:

$$IAF_l = IAF_G \cdot f_v \tag{2}$$

donde  $f_v$  es la fracción de vegetación y está dado en proporción de 0 a 1. Así, la fracción de cobertura del suelo es  $f_s = 1 - f_v$ .

En la Figura 1 se muestra el  $IAF_l$ , donde la fracción de huecos ( $f_h$ ) dentro del límite del follaje (proyección horizontal) estará dado por la Ley de Beer-Lambert, para hojas no negras (Goudriaan y van Laar, 1994):

$$f_h = 1 - T_l$$

$$T_l = \exp\left\{-(1 - \omega)^{1/2} K \cdot IAF_l\right\} \tag{3}$$

donde:  $T_l$  es la transmitancia (local) de la radianza directa solar,  $\omega = \rho + \tau$  es el albedo foliar (suma de la reflectancia y transmitancia foliar, respectivamente) y  $K$  es un

coeficiente de extinción. Nótese que  $f_v \neq f_h$ , ya que  $f_v$  se refiere a la fracción de vegetación fuera de los límites de las plantas individuales; aunque en la práctica (fotografías digitales)  $f_v$  incorpora a  $f_h$ .

En la Figura 2 se muestra el caso de un cultivo sembrado en surcos, donde al principio de la etapa de crecimiento se observa un patrón de plantas individuales, donde las plantas no se tocan entre sí (caso 3-D). Al avanzar el crecimiento, las plantas en un mismo surco se tocan entre si y forman un cultivo en hileras o surcos (caso 2-D). Cuando las plantas de diferentes surcos se tocan, tenemos la situación de cobertura total del suelo (caso 1-D). Esta dinámica de crecimiento requiere de una estrategia genérica de modelación que tome en cuenta, razonablemente, la complejidad geométrica de los cultivos en parcelas y la vegetación natural.

De la discusión anterior, un medio equivalente (términos físicos) es aquel que cumple:

$$IAF_G = \frac{IAF_l}{f_v} \tag{4}$$

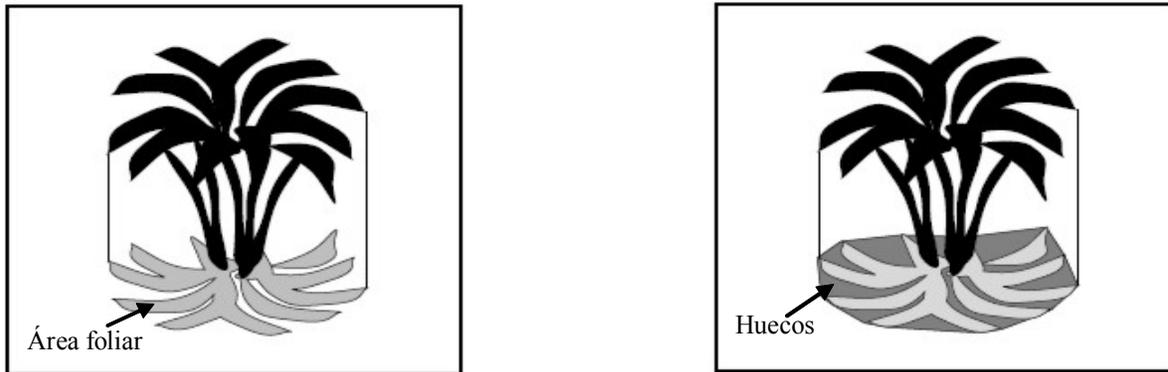


Figura 1. Área foliar y huecos para el caso de un medio local o planta individual (adaptada de BLM, 1999).

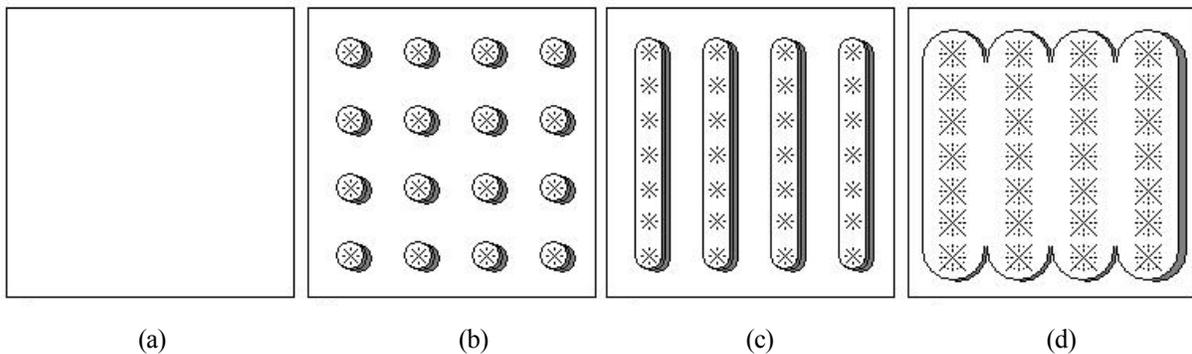


Figura 2. Geometría asociada a un cultivo sembrado en surcos. (a) suelo desnudo; (b) plantas individuales sin traslape; (c) plantas traslapadas en surcos; (d) vegetación densa traslapada.

Es decir, para una medición de  $IAF_G$  hay un número prácticamente infinito de combinaciones equivalentes de  $IAF_1$  y  $f_v$  que satisfacen la relación (4). En términos ópticos, un medio radiativo equivalente cumple la relación (4), dado que el  $IAF_1$  y  $f_v$  están en función de las propiedades ópticas del suelo y los fitoelementos de la vegetación (dejando lo demás fijo). En la Figura 3 se muestra en forma esquemática el concepto de medio equivalente, donde las reflectancias obtenidas para todos los medios mostrados son iguales, generando un problema de indeterminación a nivel sub-píxel. El medio que muestra una distribución al azar de los fitoelementos se le denomina medio turbio en términos radiativos (Ross, 1981).

Los medios radiativos equivalentes deben cumplir la condición de que sus dimensiones 3-D (voxéles) deben ser tales, que las interacciones horizontales de fotones entre píxeles contiguos sean mínimas o nulas (Pinty *et al.*, 2004). Esto se cumple generalmente en cultivos agrícolas, matorrales y pastizales y requiere de evaluarse en el caso de bosques y selvas.

### Dinámica Espectral y Espacios n-Paramétricos

Para analizar la dinámica espectral del crecimiento de los cultivos en diferentes espacios n-paramétricos, se utilizaron simulaciones radiativas de un modelo de medio turbio uni-dimensional (Verhoef, 1984), detalladas en Paz *et al.* (2005), y dos experimentos de campo con cultivos con arquetipos contrastantes: los datos fueron tomados de Bausch (1993) para maíz y Huete *et al.* (1985) para algodón. En ambos experimentos, se realizaron mediciones de reflectancia durante la etapa de emergencia y vegetativa hasta reproductiva, en cultivos sin estrés, utilizando charolas deslizantes con diferentes suelos debajo de los cultivos, para simular suelos debajo de los cultivos con propiedades ópticas diferentes, debido a textura, materia orgánica, humedad,

rugosidad y óxidos de hierro, principalmente. Estos experimentos, así como las mediciones radiométricas y biofísicas asociadas están detalladas en Paz *et al.* (2007 y 2011). En el experimento de maíz el ángulo cenital solar durante toda la campaña de muestreo varió de 17.2 a 24.2°. En el caso del experimento de algodón, las variaciones fueron de 22 a 31.7°. Considerando que las variaciones de la geometría sol-sensor fueron mínimas y que ambos experimentos muestran una ventana de condiciones de iluminación más o menos similares, no se hizo ningún intento de estandarizar la geometría sol-sensor de éstos.

### Espacio R-IRC (n = 0-paramétrico)

En la Figura 4 se muestra el espacio n = 0-paramétrico, de la banda espectral del rojo (R) e infrarrojo cercano (IRC) asociado a la dinámica del crecimiento de la vegetación, representada por el índice de área foliar, donde se usaron cuatro suelos con propiedades ópticas (reflectancias) diferentes. En esta figura las líneas iso-IAF ( $IRC = a_0 + b_0 R$ ) representan la misma cantidad de vegetación, pero con suelos diferentes; donde el caso de  $IAF = 0$  representa la línea del suelo desnudo ( $IRC = a_s + b_s R$ ). Si el suelo (reflectancia) permanece constante, entonces el crecimiento de la vegetación sigue una curva iso-Suelo. El atrayente de la dinámica del crecimiento de la vegetación para la banda del R es el punto de convergencia de todas las curvas iso-Suelo. En este punto la banda del R se satura (no cambia de valor al incrementarse el IAF) y representa a un medio ópticamente denso o infinito (Ross, 1981), por lo que se le denomina como  $R_\infty$ . El valor del IRC asociado al R de saturación es  $IRC_{R_\infty}$ . La banda del IRC sigue creciendo hasta alcanzar su propio punto de saturación definido por  $IRC_\infty$ .

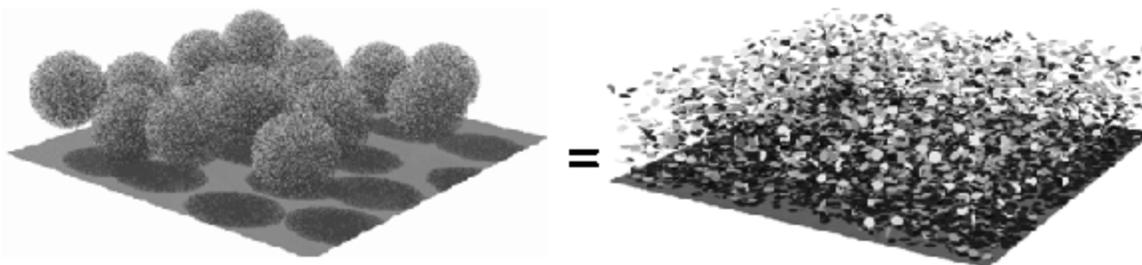


Figura 3. Medios radiativos equivalentes, adaptada de Pinty *et al.*, 2001.

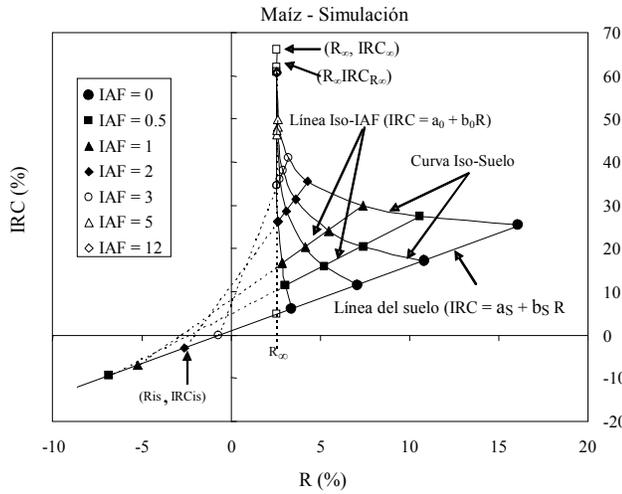


Figura 4. Patrones espectrales en el espacio R-IRC (n = 0-paramétrico).

Las reflectancias en el infinito están en función de las propiedades ópticas de las hojas y su distribución angular, y la geometría sol-sensor, principalmente (Ross, 1981; Zarco *et al.*, 2008; Paz *et al.*, 2009a). Las concentraciones de los constituyentes bioquímicos foliares están en función de las propiedades ópticas de las hojas (reflectancia y transmitancia) (Jacquemoud *et al.*, 1996), por lo que determinadas éstas es posible realizar estimaciones desacopladas de los parámetros estructurales del follaje, puesto que la reflectancia en el infinito es invariante por efecto del IAF o  $f_v$  (los valores superiores de estos parámetros no cambian las reflectancias en el infinito).

Los patrones lineales iso-IAF mostrados para el caso uni-dimensional también son válidos para el caso de simulaciones radiativas tri-dimensionales (Gao *et al.*, 2000) y cultivos reales con mediciones de campo (Paz *et al.*, 2007 y 2011). El rompimiento de la linealidad (polinomio de segundo grado) se presenta cuando los valores de las reflectancias de los suelos son altos (tipo desiertos). En el caso de los espacios del espectro visible (azul o A, verde o V y rojo) con el del IRC tiene patrones similares a los mostrados en la Figura 4 (Paz *et al.*, 2005), producto de la linealidad de los patrones de las reflectancias de los suelos que impone una condición de frontera lineal en la solución de la ecuación de transferencia de fotones en el sistema suelo-vegetación. Así, los resultados mostrados en lo siguiente son generalizables para los espacios A-IRC y V-IRC. En el caso de los infrarrojos medios, los resultados son

aplicables pero con una simetría no lineal, producto de que los patrones de las reflectancias de los suelos son no lineales (Paz *et al.*, 2009b).

En la misma Figura 4 se muestran la proyección de las líneas iso-IAF hasta la intersección con la línea del suelo ( $R_{is}$ ,  $IRC_{is}$ ), definida por:

$$R_{is} = \frac{a_S - a_0}{b_0 - b_S} \quad (5)$$

$$IRC_{is} = \frac{a_0 b_S - a_S b_0}{b_S - b_0} \quad (6)$$

### Espacio $a_0$ - $b_0$ (n = 1-paramétrico)

Los parámetros de las líneas iso-IAF del espacio R-IRC, Figura 4, forman un espacio n = 1-paramétrico con patrones específicos. La Figura 5a muestra el espacio  $a_0$ - $b_0$  para las simulaciones radiativas de la Figura 4, donde se observa un patrón exponencial para valores bajos del IAF y para valores altos el patrón es lineal. Entre ambos patrones hay valores asociados a un IAF de transición, que implica un cambio en las pendientes de la curva exponencial a la lineal. Esto queda más claro si utilizamos la transformación  $1/b_0$  y la analizamos en relación a  $a_0$  (Figura 5b). En este caso se observan dos patrones aproximadamente lineales. Cuando  $b_0$  tiende al valor de la pendiente asociada a la línea recta del ápice de la Figura 4 (reflectancias en el infinito), entonces  $1/b_0$  tiende a cero (Figura 5b).

El patrón de la Figura 5b ha sido usado para el diseño del índice espectral NDVI<sub>cp</sub>, donde los casos del maíz y algodón discutidos se conforman muy bien al patrón observado para las simulaciones radiativas (Paz *et al.*, 2007).

Es conveniente analizar los patrones temporales del IAF asociado a los dos cultivos bajo análisis. La Figura 6 muestra la evolución del IAF en el tiempo para el maíz y algodón, donde se observa al inicio de la emergencia del cultivo un patrón exponencial, seguido por uno lineal, dentro de la etapa vegetativa. Posteriormente, al inicio de la etapa reproductiva se presenta un patrón tipo exponencial que termina hasta el IAF máximo. La fase exponencial y lineal de la etapa vegetativa puede caracterizarse con un modelo expo-lineal (Ferrandino, 1989; Goudriaan y Monteith, 1990) y generalizarse a

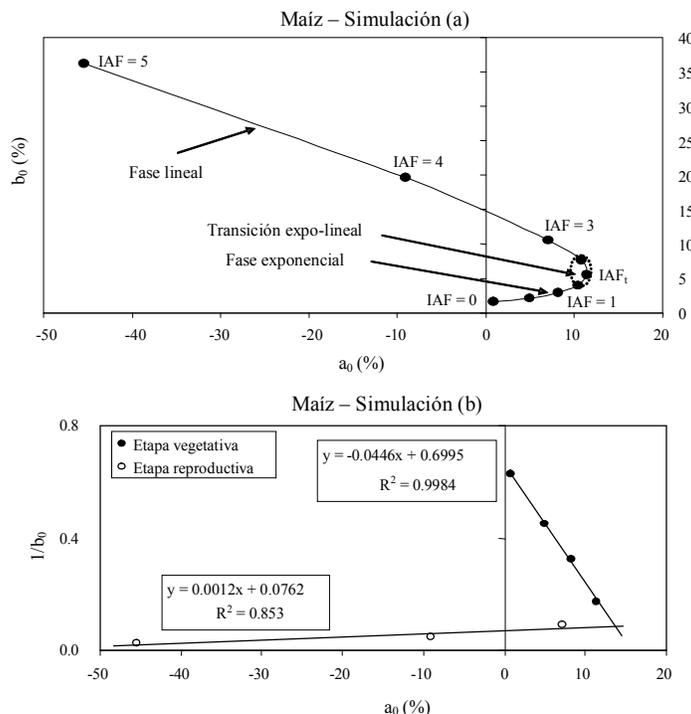


Figura 5. Patrones de la dinámica espectral en el espacio: (a)  $a_0$ - $b_0$  y (b)  $a_0$ - $1/b_0$ .

uno expo-lineal-exponencial (Goudriaan, 1994) para modelar en forma completa los patrones mostrados en la Figura 6. Estos modelos tienen bases biofísicas relacionados con la Ley de Beer-Lambert (hojas negras, es decir, hojas que absorben todos los fotones que chocan contra ellas) y la eficiencia de conversión de radiación solar a área foliar o biomasa aérea fueron desarrollados bajo la consideración de medios turbios. En esta situación idealizada, los patrones exponencial y lineal de

la Figura 5a y 6 se corresponden, por lo que se observa que un espacio espectral puede proyectarse a un espacio temporal. No obstante esto, para cultivos sin competencia extrema entre sí, la fase expo-lineal en tiempo del IAF aproxima la fase exponencial hasta un poco más de la transición a la lineal del espacio  $a_0$ - $b_0$  y la fase exponencial de la etapa de reproducción del IAF se aproxima a los inicios de la fase lineal del espacio  $a_0$ - $b_0$ ; aunque los patrones espectrales entre un medio turbio y uno heterogéneo o tri-dimensional son similares, las tasas de cambio son diferentes. Esto se discute más adelante, particularmente para valores más allá del punto de transición del patrón exponencial al lineal.

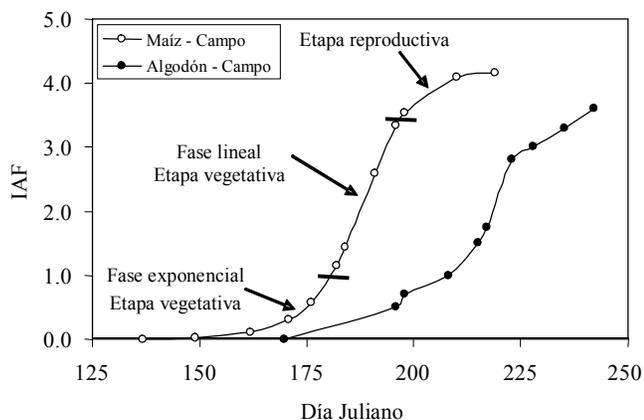


Figura 6. Patrones temporales del IAF para el maíz y algodón analizados.

### Espacio dIRC-R (n = 0-paramétrico)

Las reflectancias en el infinito están relacionadas con las propiedades ópticas foliares de interés, por lo que es necesario estimar primero sus valores. Para lograr este objetivo es necesario hacer lineales las curvas iso-suelo (Figura 4) usando el espacio transformado dIRC-IRC (Paz *et al.*, 2006), donde  $dIRC = IRC - (a_s + b_s R)$ . En este espacio las líneas iso-IAF ( $IRC = a_1 + b_1 dIRC$ ) están dadas por (Paz *et al.*, 2005 y 2006):

$$a_t = a_0(1 - b_1) + a_s b_1$$

$$b_1 = \frac{b_0}{b_0 - b_s} \tag{7}$$

El problema del espacio R-IRC es que al aproximar las reflectancias del infinito, las líneas iso-IAF tienen pendientes que tienden a infinito. En el espacio dIRC-IRC, cuando  $b_0$  tiende a infinito,  $b_1$  tiende a 1 (línea de 45°), aunque permanece el problema de pendiente con valor infinito para la línea del suelo (Figura 7).

Se observa en la Figura 7 que después de un punto de transición  $t$  (transición de la etapa exponencial a la lineal mostrada en la Figura 5a), las pendientes de las líneas iso-IAF son indistinguibles del valor 1, tanto a nivel de simulaciones (Figura 7a), como de mediciones en campo (Figura 7b). En la fase exponencial del crecimiento de los cultivos, en el espacio espectral dIRC-IRC, podemos aproximar las curvas iso-Suelo con líneas rectas ( $IRC = r_1 + s_1 dIRC$ ) (Figura 7). Las líneas iso-suelo se interceptan en el punto ( $dIRC_t, IRC_t$ )

y después de este punto hasta el punto de saturación del R ( $dIRC_{R\infty}, IRC_{R\infty}$ ), región de la transición exponencial-lineal de la Figura 5a, las pendientes de las líneas iso-Suelo se aproximan a 1, por lo que resultan difícil de distinguir de esta pendiente. Esto es consecuencia de los valores relativos entre dIRC e IRC. En el caso de mediciones en campo, de reflectancias de los cultivos, donde la fase lineal es muy corta (espectralmente hablando), se puede utilizar la aproximación:  $dIRC_t = dIRC_{R\infty}$  y  $IRC_t = IRC_{R\infty}$  (Paz et al., 2008a) (Figura 7b).

El problema del espacio dIRC-IRC es que el valor de  $IRC_{\infty}$  no es accesible antes o después de la fase exponencial (Figura 7), ya que no se conoce cuando será el valor máximo de la línea a 45 grados después de esta fase.

**Espacio  $a_1$ - $\beta$  (n = 1-paramétrico)**

La ventaja del espacio dIRC-IRC es que permite plantear la relación entre los parámetros  $a_1$  y  $b_1$  de las líneas de iso-IAF en un formato donde la pendiente va de un valor de 90° (suelo desnudo) a 45° (vegetación

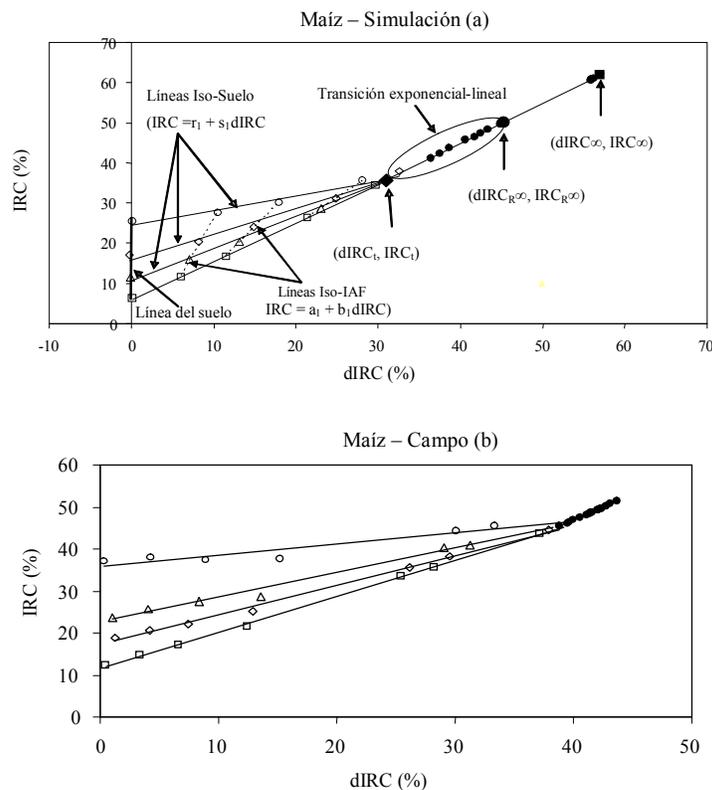


Figura 7. Patrones espectrales en el espacio dIRC-IRC.

ópticamente densa). Así, Paz *et al.* (2005 y 2006) propusieron la transformación de  $b_1$  a un formato estandarizado:

$$\beta = \frac{90 - \tan^{-1}(b_1)}{45} \quad (8)$$

$0 \leq \beta \leq 1$

En la Figura 8 se muestran los patrones del espacio  $n = 1$ -paramétrico  $a_1$ - $\beta$ , tanto para las simulaciones radiativas como para las mediciones en campo.

En el caso de las simulaciones radiativas, la relación entre  $a_1$ - $\beta$  es del tipo exponencial, Figura 8a, donde el valor 1.11 usado fue optimizado para el modelo radiativo aplicado (Paz *et al.*, 2005). En el caso de las mediciones en campo, el patrón es lineal (Figura 8b). Esta diferencia de patrones es producto del desarrollo corto o largo de la fase lineal en la etapa vegetativa, tal como se discutió anteriormente. En el caso de las simulaciones radiativas, el patrón exponencial puede aproximarse por dos patrones lineales que coinciden, aproximadamente, en el punto de transición de la fase exponencial a la lineal (Romero *et al.*, 2009). No obstante esta situación,

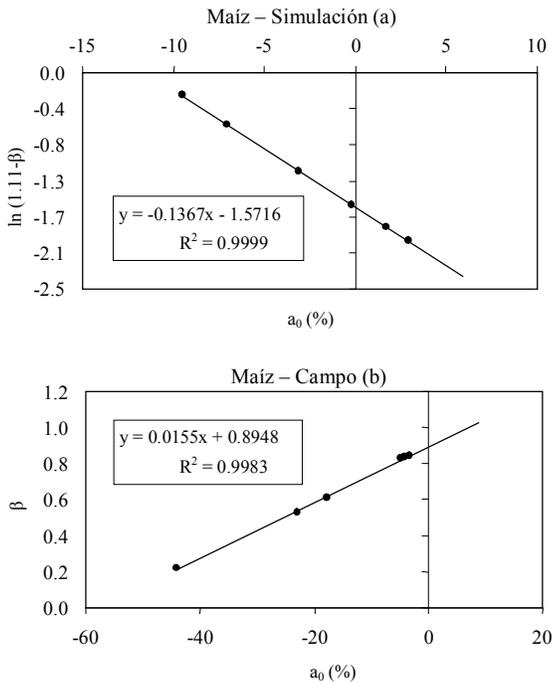


Figura 8. Patrones del espacio  $n=1$ -paramétrico  $a_1$ - $\beta$ .

el punto crítico es que las tasas de cambio espectrales tienen diferencias entre el caso de medios homogéneos (turbios) y heterogéneos (campo). Esto explica algunas inconsistencias discutidas más adelante.

### Problemática Asociada a las Mediciones Espectrales de Cultivos en Campo

Las mediciones de reflectancias en los cultivos de maíz y algodón, usando fondos de suelos deslizables, dentro del error experimental, presentan algunos problemas. En la Figura 9a para el maíz (similar al caso del algodón), las curvas iso-Suelo muestran un inicio con valores menores del R e IRC a los esperados, provocando que los patrones similares a los mostrados en la Figura 4 tengan valores de reflectancia mayores para el suelo, por lo que al desechar los datos del suelo desnudo (como se hizo) se recuperan los patrones. No está clara una explicación de esta situación, aunque

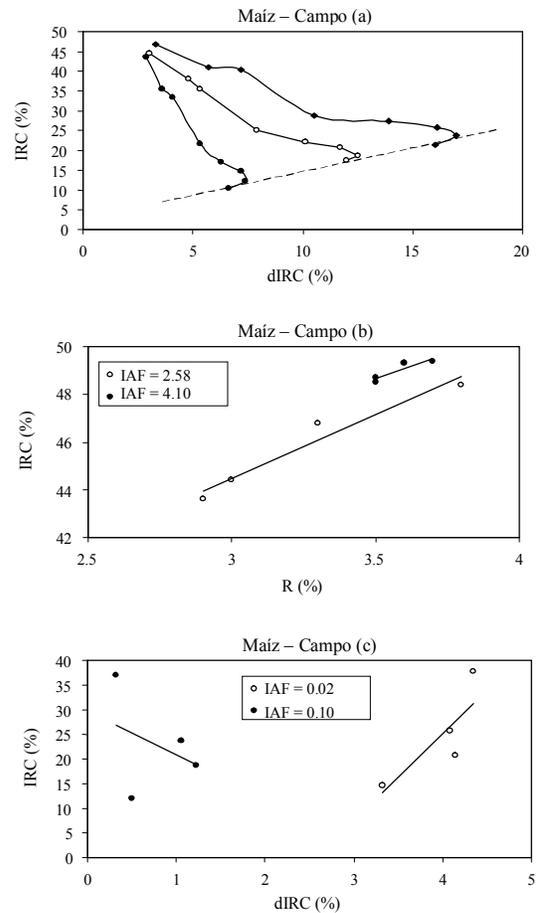


Figura 9. Problemáticas espectrales asociadas a las mediciones de reflectancias en campo.

probablemente sea efecto de sombreado y rugosidad del suelo.

En el caso del espacio R-IRC, las líneas iso-IAF para valores grandes del IAF muestran errores importantes (Figura 9b) y para el caso de IAF para los valores pequeños los ajustes son buenos (no mostrados). Para el espacio dIRC-IRC la situación se revierte, donde los líneas iso-IAF para valores grandes del IAF tienen buenos ajustes (no mostrados), pero para valores pequeños del IAF los ajustes son malos (Figura 9c). Estas tendencias en los errores se propagan en los análisis de los espacios  $n = 1$ -paramétricos de estos espacios espectrales.

De la discusión anterior, los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  (y otros) de los cultivos agrícolas analizados fueron estimados usando una combinación de los espacios espectrales discutidos y sus transformaciones, para contar con información completa.

### Espacio IVPP-R ( $n = 0$ -paramétrico)

Como se comentó anteriormente, la estimación de  $IRC_{\infty}$ , así como las propiedades ópticas y concentraciones bioquímicas asociadas, son imposibles en el espacio del dIRC-IRC. Otra alternativa para hacer lineales las curvas iso-Suelo es usar el espacio espectral

IVPP-R (Paz *et al.*, 2008a), donde  $IVPP = dIRC/IRC$  (Figura 10).

La ventaja del espacio IVPP-R es que solo considera la perspectiva de la banda del R y está acotado por el límite de los patrones iso-Suelo del espacio R-IRC hasta el punto  $(R_{\infty}, IRC_{R_{\infty}})$  de la Figura 4, ya que el formato del IVPP reduce los efectos de las contribuciones arriba de este valor (hacia la saturación de la banda del IRC).

En el espacio IVPP-R, las líneas iso-IAF son curvas no lineales (Figura 10) contrastando con la linealidad de las curvas iso-Suelo ( $R = r_2 + s_2 IVPP$ ). Las curvas iso-Suelos representan, en el espacio del R-IRC, un modelo lineal con interacciones:

$$(r_2 + s_2)IRC - (R)IRC - b_S s_2 R - a_S s_2 = 0$$

$$IRC = \frac{s_2 dIRC}{R - r_2} \quad (9)$$

Definido  $(IVPP_{R_{\infty}}, R_{\infty})$  entonces podemos estimar los valores del IRC asociados:

$$IRC_{R_{\infty}} = \frac{a_S + b_S R_{\infty}}{1 - IVPP_{R_{\infty}}} \quad (10)$$

$$dIRC_{R_{\infty}} = (IVPP_{R_{\infty}})IRC_{R_{\infty}}$$

Las relaciones (10) evitan el problema de la hipótesis  $dIRC_t = dIRC_{R_{\infty}}$  y  $IRC_t = IRC_{R_{\infty}}$  del uso del espacio del dIRC-IRC y permiten una estimación directa del punto  $(R_{\infty}, IRC_{R_{\infty}})$  de la Figura 4.

### Espacio $s_1$ - $r_1$ ( $n = 1$ -paramétrico)

En la Figura 11 se muestra el patrón entre los parámetros  $s_1$ - $r_1$  de las líneas del suelo del espacio dIRC-IRC.

La relación mostrada en la Figura 11 está definida por:

$$r_1 = IRC_t - (dIRC_t) s_1 \quad (11)$$

La cual es consecuencia de la propiedad de un conjunto de líneas rectas que tienen un punto de intersección común.

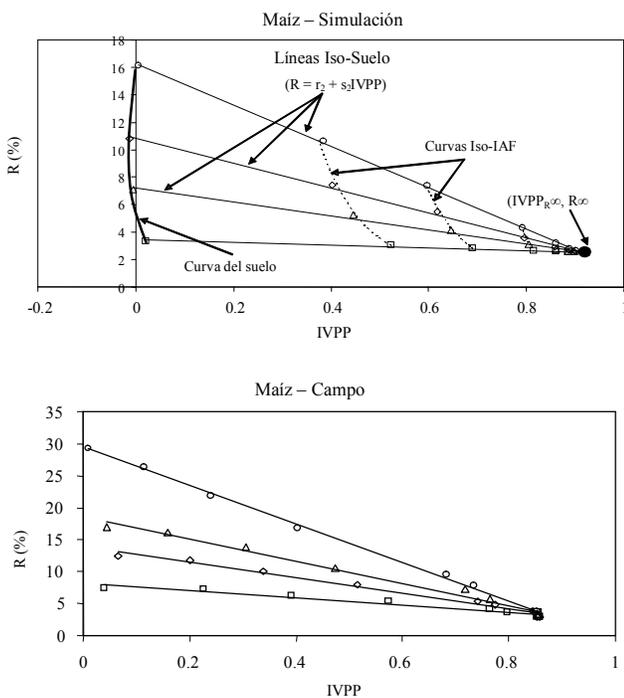


Figura 10. Patrones del espacio  $n=0$ -paramétrico IVPP-R.

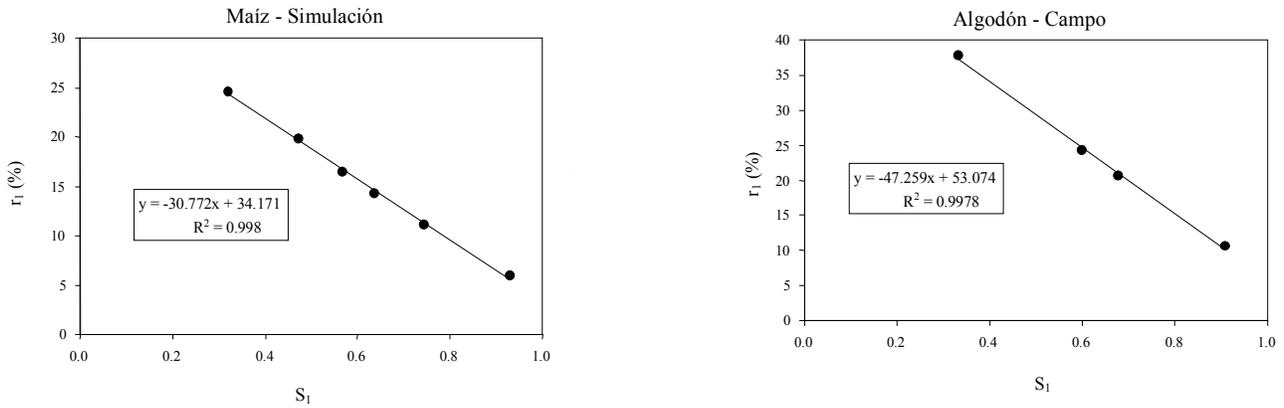


Figura 11. Patrones del espacio  $s_1$ - $r_1$  (n=1 - paramétrico).

**Espacio  $s_2$ - $r_2$  (n = 1-paramétrico)**

En la Figura 12 se muestra el patrón entre los parámetros  $s_2$ - $r_2$  de las líneas del suelo del espacio IVPP-R. La relación mostrada en la Figura 12 está definida por:

$$r_2 = R_{\infty} - (IVPP_{R_{\infty}})s_2 \tag{11}$$

la cual es también consecuencia de la propiedad de un conjunto de líneas rectas que tienen un punto de intersección común.

**Espacio  $R_s$ - $R_{sv}$  e  $IRC_s$ - $IRC_{sv}$  (n = 0-paramétrico)**

Para medios homogéneos (medios turbios), la relación entre la reflectancia de la mezcla suelo-vegetación, puede aproximarse considerando solo interacciones de primer orden de los fotones (chocan contra el suelo una sola vez) (Huete, 1987):

$$R_{sv} = R_v + T_R^2 R_s \tag{12}$$

$$IRC_{sv} = IRC_v + T_{IRC}^2 IRC_s$$

donde: T se refiere a la transmitancia en la banda espectral particular,  $R_s$  e  $IRC_s$  son las reflectancias del suelo (huecos en la vegetación),  $R_v$  e  $IRC_v$  son las reflectancia de solo la vegetación ( $R_s = 0$  o condición de frontera de suelo negro) y  $R_{sv}$  e  $IRC_{sv}$  son las reflectancias del sistema suelo-vegetación (medio turbio).

En el caso de medios heterogéneos (no turbios), podemos usar la aproximación de una mezcla lineal entre las reflectancias del suelo desnudo y de la mezcla suelo-vegetación (medio turbio):

$$R_{sv} = f_v R_v + f_s R_s = f_v R_v + (1 - f_v) R_s \tag{13}$$

$$IRC_{sv} = f_v IRC_v + (1 - f_v) IRC_s$$

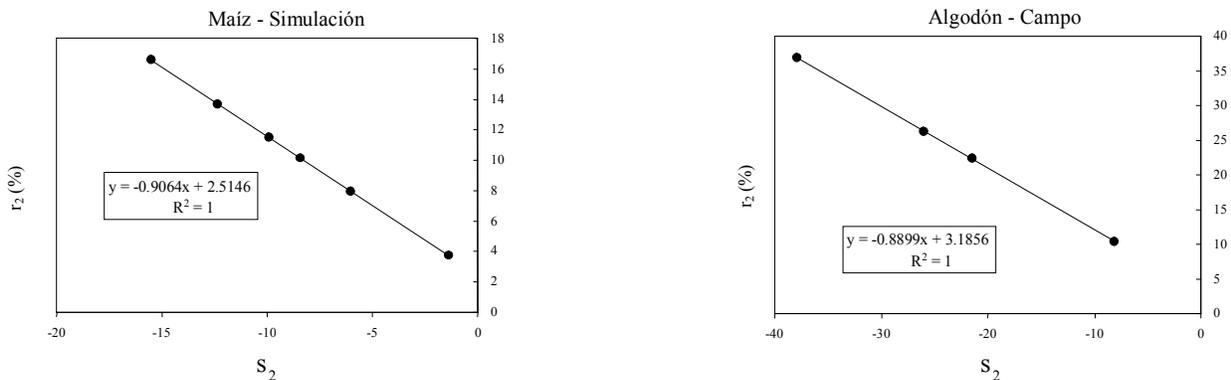


Figura 12. Patrones del espacio  $s_2$ - $r_2$  (n=1-paramétrico).

donde  $R_v$  e  $IRC_v$  se refiere a la reflectancia de la mezcla suelo desnudo-vegetación (medio turbio, con una fracción  $f_h$  de suelo en los huecos de la vegetación, relación (3).

La determinación de las reflectancias de la mezcla suelo-vegetación (medio turbio) pueden aproximarse usando la solución de un sistema de ecuaciones tipo Kubelka-Munk (Bonhomme y Varlet, 1977; Goudriaan, 1977; Ross, 1981) para radiación difusa (válida también para radiación total), bajo la condición de frontera de suelo negro:

$$\begin{aligned} R_v &= (1 - T_R^2)R_\infty \\ IRC_v &= (1 - T_{IRC}^2)IRC_\infty \end{aligned} \quad (14)$$

De las relaciones (12) y (13) se puede establecer (Yoshiaka *et al.*, 2000):

$$\begin{aligned} R_{sv} &= f_v R_v + [f_v T_R^2 + (1 - f_v)]R_s \\ IRC_{sv} &= f_v IRC_v + [f_v T_{IRC}^2 + (1 - f_v)]IRC_s \end{aligned} \quad (15)$$

que puede plantearse en función de las reflectancias en el infinito usando las relaciones (14):

$$\begin{aligned} R_{sv} &= f_v R_\infty (1 - T_R^2) + [f_v T_R^2 + (1 - f_v)]R_s \\ IRC_{sv} &= f_v IRC_\infty (1 - T_{IRC}^2) + [f_v T_{IRC}^2 + (1 - f_v)]IRC_s \end{aligned} \quad (16)$$

Para el caso de medios turbios, las relaciones (16) se revierten a las (13),  $f_v = 1$ .

Usando la relación  $IRC_{sv} = a_s + b_s R_{sv}$  (mezcla suelo desnudo y suelo-vegetación) de la línea del suelo,

podemos sustituir las relaciones (15) en esta relación (Yoshiaka *et al.*, 2000) para obtener la relación que define los parámetros de las líneas iso-IAF del espacio R-IRC y utilizar las relaciones (14) para plantearlas en función de las reflectancias en el infinito (accesibles en términos experimentales y de sensores remotos):

$$\begin{aligned} IRC_{sv} &= a_0 + b_0 R_{sv} \\ a_0 &= f_v IRC_\infty (1 - T_{IRC}^2) + a_s [f_v T_{IRC}^2 + (1 - f_v)] - b_0 f_v R_\infty (1 - T_R^2) \\ b_0 &= b_s \left[ \frac{f_v T_{IRC}^2 + (1 - f_v)}{f_v T_R^2 + (1 - f_v)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Las Ecuaciones (5), (6), (7), (8), (16) y (17) definen las relaciones entre los diferentes espacios analizados en este trabajo, las cuales pueden usarse en forma simultánea para evaluar la congruencia y estimaciones de los diferentes espacios. La ventaja de la parametrización de las relaciones (17) es que los parámetros de las líneas iso-IAF, espacio del R-IRC, están definidas en función de los parámetros de las líneas del suelo (no de los valores específicos de las reflectancias) y de las transmitancias solo de la vegetación (el suelo desnudo está incorporado en el término  $f_v$ ), accesibles a nivel experimental (además de las reflectancias en el infinito determinadas de acuerdo a los procedimientos experimentales introducidos en Paz *et al.*, 2008a).

En la Figura 13 se muestran los patrones del espacio  $R_s$ - $R_{sv}$  y en la Figura 14 los del espacio  $IRC_s$ - $IRC_{sv}$ , los cuales implican relaciones lineales de acuerdo a las ecuaciones (12), (15) o (16) definidas previamente.

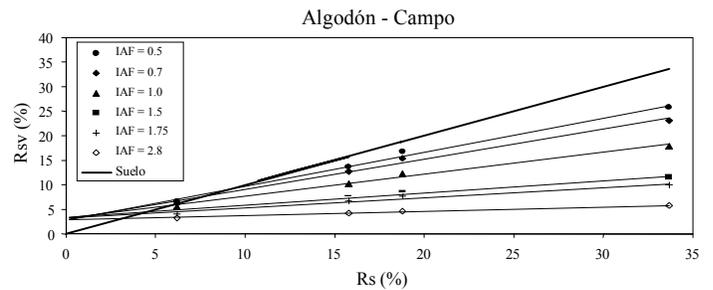
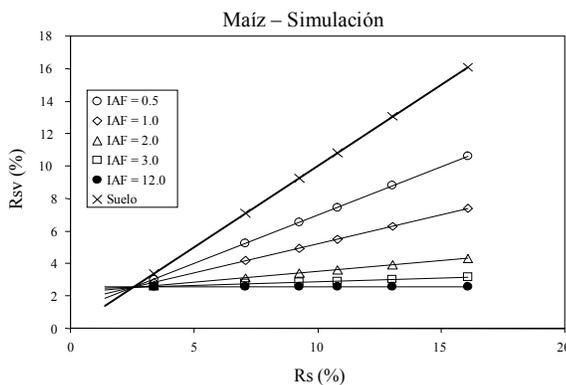


Figura 13. Patrones del espacio  $R_s$ - $R_{sv}$  ( $n = 0$ -paramétrico).

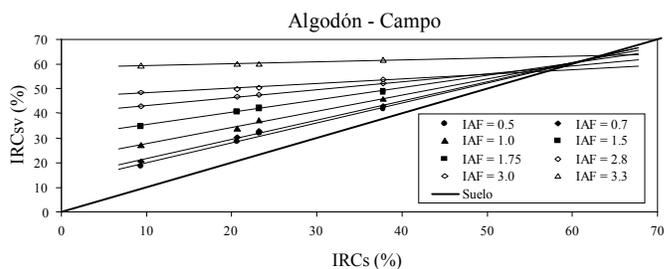
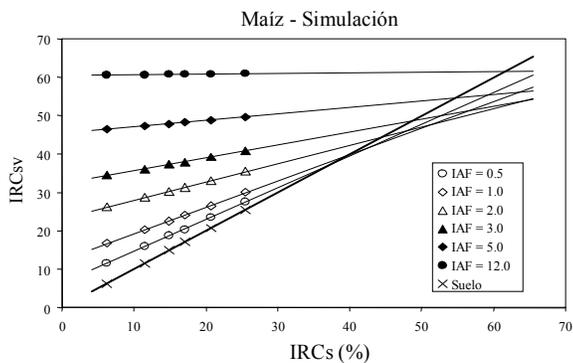


Figura 14. Patrones del espacio IRCs-IRCsv (n = 0-paramétrico).

La hipótesis de interacciones de orden uno de las reflectancias y el modelo lineal de las ecuaciones (13) explican los comportamientos observados (medios equivalentes).

En el caso del espacio Rs-Rsv, las líneas iso-IAF de la Figura 13 pueden ser representadas usando la relación  $R_{sv} = t_1 + u_1 R_s$  y para el espacio IRCs-IRCsv (Figura 14) por  $IRC_{sv} = t_2 + u_2 IRC_s$ .

**Espacio  $u_1-t_1$  (n = 1-paramétrico)**

La Figura 15 muestra el patrón entre los parámetros  $u_1$  y  $t_1$  de la relación lineal entre Rs-Rsv, para las simulaciones radiativas.

De la relación (16) para Rsv, los parámetros  $u_1$  y  $t_1$  pueden definirse en términos de  $f_v$  y  $T_R$ , por lo que podemos ponerlos en términos de  $f_v$  e igualar los resultados para obtener:

$$t_1 = R_{\infty} - R_{\infty} u_1 \tag{18}$$

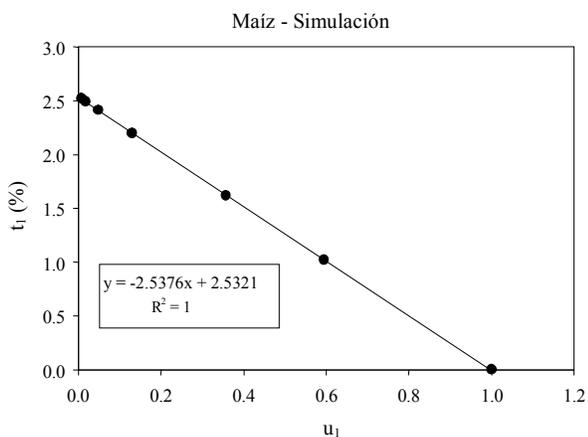


Figura 15. Patrones del espacio  $u_1-t_1$  (n = 1-paramétrico), simulaciones radiativas.

El patrón de la Figura 15 es congruente con esta parametrización, que aunque este espacio nos permite obtener  $R_{\infty}$  en forma alternativa al espacio IVPP-R, este último es más estable.

En la Figura 16 se presentan los patrones del espacio  $u_1-t_1$  para los dos experimentos de campo analizados.

Los patrones observados en la Figura 16 son consecuencia de los problemas asociados a

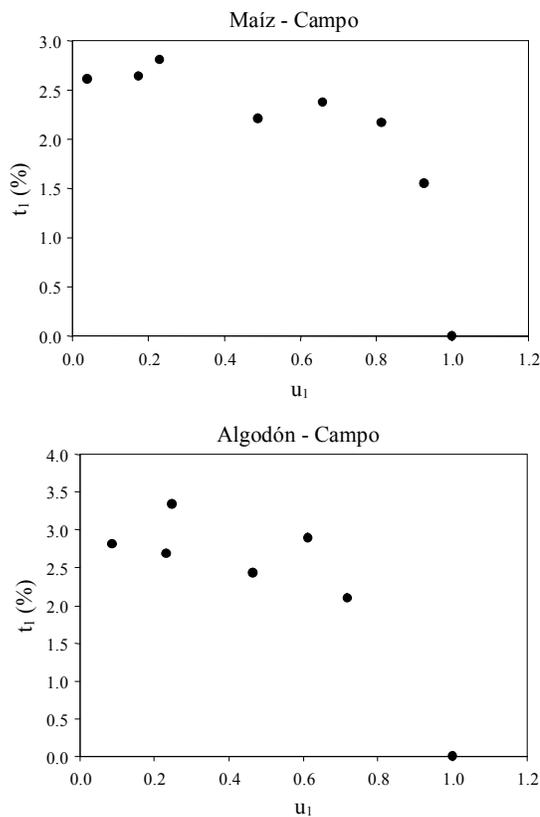


Figura 16. Patrones del espacio  $u_1-t_1$  (n = 1-paramétrico), experimentos de campo.

las mediciones de las reflectancias del R (poca variación) y pueden aproximarse por un modelo polinómico de segundo orden.

**Espacio  $u_2-t_2$  ( $n = 1$ -paramétrico)**

En la Figura 17 se muestra el patrón del espacio  $u_2-t_2$ , asociado al modelo lineal entre IRCs e IRCsv, para las simulaciones radiativas.

El modelo polinómico de segundo orden de la Figura 17 puede parametrizarse usando las condiciones de frontera  $u_2=1, t_2=0$  y  $u_2=0, t_2=IRC\infty$ , para quedar como:

$$t_2 = l_1 u_2^2 - (IRC\infty + l_1) u_2 + IRC\infty \quad (19)$$

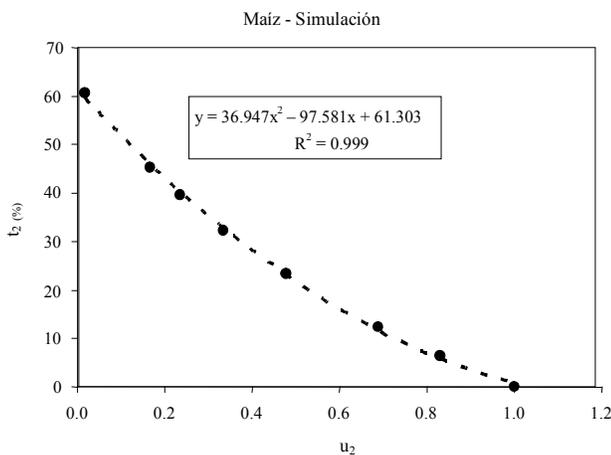
que es consecuencia de la fase lineal larga de la etapa vegetativa modelada en las simulaciones radiativas.

En el caso de las mediciones de campo de reflectancias, fase lineal corta, la Figura 18 muestra los patrones entre  $u_2-t_2$ .

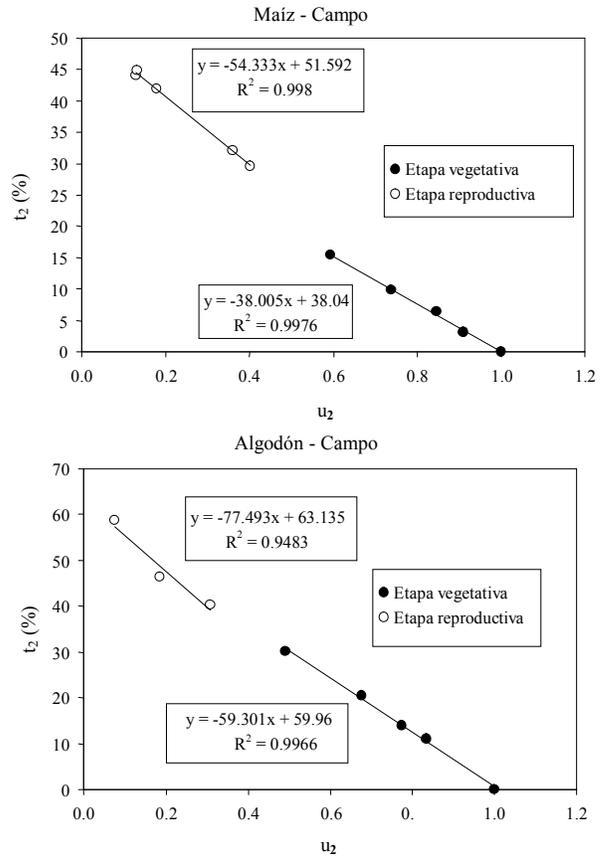
En la Figura 18 se ha ajustado un modelo lineal para la etapa vegetativa y otro para la reproductiva con buenos ajustes, que es congruente con el modelo lineal implicado por la relación (18):

$$t_2 = IRC\infty - IRC\infty u_2 \quad (19)$$

No obstante esto, en el caso del maíz, el  $IRC\infty$  asociado a la etapa vegetativa no es congruente con los resultados del espacio  $DIRC-IRC$ . Así, en la Figura 19 se muestra el resultado del ajuste de un solo modelo lineal para los datos de la etapa vegetativa y reproductiva,



**Figura 17. Patrones del espacio  $u_2-t_2$  ( $n = 1$ -paramétrico), simulaciones radiativas.**



**Figura 18. Patrones del espacio  $u_2-t_2$  ( $n = 1$ -paramétrico), experimentos de campo.**

después de eliminar el dato para  $IAF = 0.58$  del maíz, dato que rompe patrones en varios espacios analizados y que probablemente tenga un error experimental grande de medición; algo similar sucede con el dato de  $IAF = 0.31$ .

Las implicaciones de usar un solo modelo lineal para la etapa vegetativa y reproductiva, considerando que las reflectancias son función de las propiedades ópticas y angulares de las hojas (ver sección siguiente), son que los cultivos mantienen un patrón invariante de ambas propiedades durante el crecimiento hasta el valor del  $IAF$  máximo (Casiano *et al.* 2012), donde la etapa reproductiva con propiedades ópticas diferentes a la vegetativa conserva el patrón global al cambiar sus propiedades angulares; esto en términos de medios equivalentes.

**Espacio  $IRCis-t_2$  ( $n = 1$ -paramétrico)**

En el caso del patrón polinómico entre  $u_2$  y  $t_2$  para las simulaciones radiativas, podemos generar un espacio

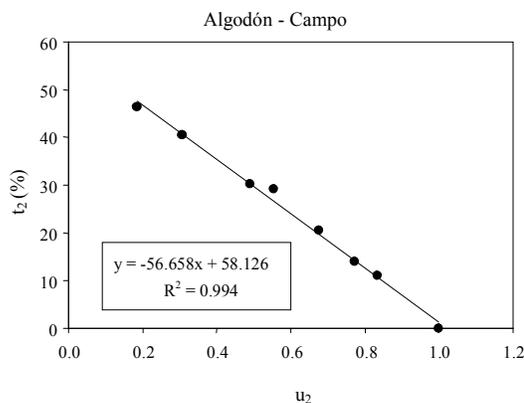
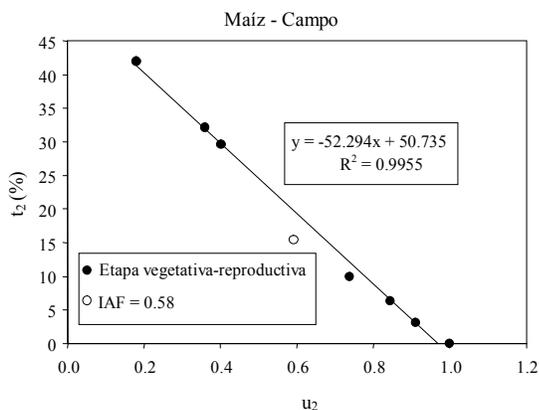


Figura 19. Patrones del espacio  $u_2$ - $t_2$  ( $n = 1$ -paramétrico), experimentos de campo y un solo modelo para las etapas vegetativa y reproductiva.

alternativo que lo planteo en forma lineal: IRCis- $t_2$  (Figura 20).

El modelo lineal de la Figura 20 está dado por:

$$t_2 = -v + wIRCis \quad (20)$$

por lo que considerando que la línea del suelo mostrada en la Figura 20 tiene pendiente unitaria e intersección cero, la intersección de ambas líneas definirá el punto  $IRC\infty$ :

$$IRC\infty = \frac{v}{1-w} \quad (21)$$

Se observa en la Figura 21 los problemas asociados a la propagación de errores de las mediciones de campo, discutidos anteriormente.

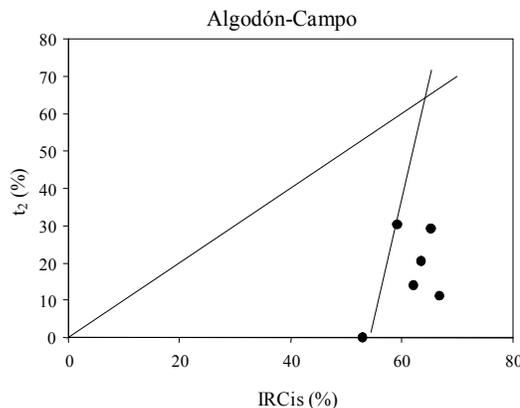
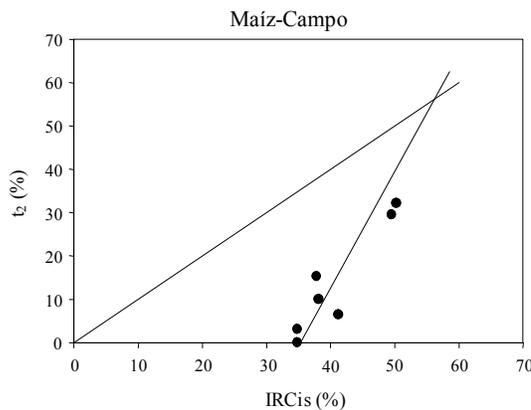
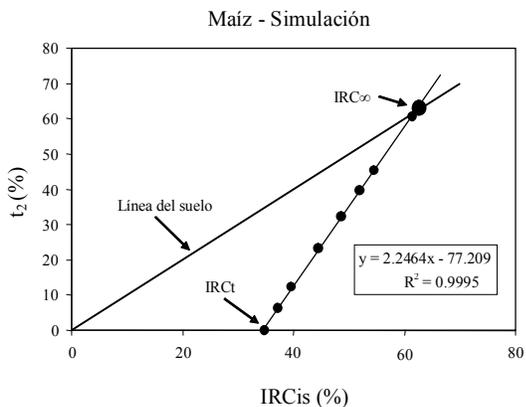


Figura 20. Patrones del espacio IRCis- $t_2$  ( $n = 1$ -paramétrico), simulaciones radiativas.

Figura 21. Patrones del espacio IRCis- $t_2$  ( $n = 1$ -paramétrico) para experimentos de campo.

si consideramos cualquier espacio meta-paramétrico entre los parámetros A y B, podemos ajustar un modelo lineal, en forma directa o transformando el espacio, del tipo:

$$B = AA + BB(A) \quad (22)$$

Los parámetros AA y BB del espacio meta-paramétrico definen un solo punto en el espacio supra-paramétrico AA-BB y representa la dinámica del crecimiento asociado a un medio ambiente y manejo particular (Paz *et al.*, 2009c). En el caso de los espacios espectrales, representan la trayectoria espectral del crecimiento bajo la consideración de un número infinito de condiciones iniciales, representadas por distintas propiedades ópticas del fondo de la vegetación.

Los patrones en el espacio AA-BB (diferentes medios ambientes y manejos) definen un patrón genérico para cada cultivo o vegetación, representando en forma muy compacta una especie de “genotipo” que tiene asociado un número infinito de “fenotipos” (dinámicas del crecimiento asociadas a los espacios meta-paramétricos para un medio ambiente y manejo particular) (Solorio *et al.*, 2008; Paz *et al.*, 2009c; Reyes *et al.*, 2011). La Figura 22 esquematiza el espacio supra-paramétrico discutido.

En un espacio superior ( $n = 3$ -paramétrico),  $AA = AAA + BBB$  (BB), podemos comparar diferentes tipos de cultivo o vegetación en forma extremadamente compacta, permitiendo su caracterización asociada al espacio de análisis particular (espectral, temporal, angular, etc.) (Solorio *et al.*, 2008; Paz *et al.*, 2009c; Reyes *et al.*, 2011).

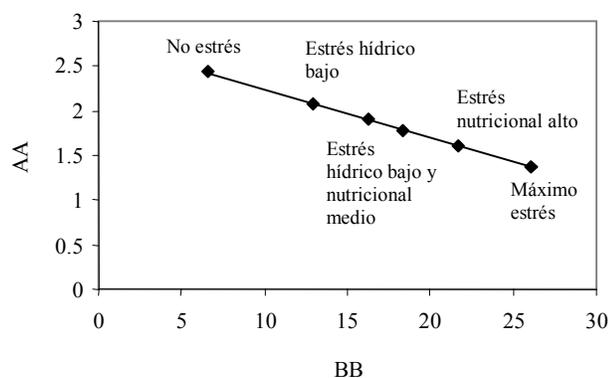


Figura 22. Esquemización del espacio supra-paramétrico para cultivos.

## CONCLUSIONES

- En este trabajo se introdujo un marco metodológico para la estimación de las reflectancias en el infinito usando diferentes espacios n-paramétricos, conversión de medios heterogéneos a homogéneos, bajo la restricción de medios equivalentes que usan parámetros efectivos de las propiedades biofísicas y bioquímicas asociadas a la geometría 3-D de la vegetación. Este marco teórico (aproximado) permite resolver el problema de acoplamiento entre las propiedades estructurales y bioquímicas de la vegetación planteado por Lewis y Disney (2007), que imposibilita la estimación conjunta de ambas propiedades. La solución planteada es totalmente operacional.
- Con la estimación de las reflectancias en el infinito, atrayentes de la dinámica espectral asociada al crecimiento de la vegetación, podemos usar la teoría de transferencia radiativa de medios turbios u homogéneos para estimar las propiedades ópticas (equivalentes) del follaje de la vegetación y poder hacer estimaciones de las concentraciones de los componentes bioquímicos, usando una aproximación semi-teórica (Jacquemoud y Baret, 1990; Jacquemoud *et al.*, 1996) o semi-empírica (Gitelson *et al.*, 2003).

## LITERATURA CITADA

- Bausch, W. C. 1993. Soil background effects on reflectance-based crop coefficients for corn. *Remote Sens. Environ.* 46: 213-222.
- BLM (Bureau of Land Management). 1999. Sampling vegetation attributes. Interagency technical reference. Technical reference 1734-4. Bureau of Land Management, U.S. Department of Interior. Denver, CL, USA.
- Bonhomme, R. et C. Varlet-Grancher. 1977. Application aux couverts végétaux de lois rayonnement en milieu diffusant. I Etablissement des lois et vérifications expérimentales. *Ann. Agron.* 28: 567-582.
- Broge, N. H. and E. Leblanc. 2000. Comparing prediction power and stability of broadband and hyperspectral vegetation indices for estimation of green leaf area index and canopy chlorophyll density. *Remote Sens. Environ.* 76: 156-172.
- Casiano, M., F. Paz, A. Zarco, M. Bolaños y E. Palacios. 2012. Escalamiento espacial de medios heterogéneos espectrales usando invarianzas temporales. *Terra Latinoamericana* 30: 315-326.
- Ferrandino, F. J. 1989. Spatial and temporal variation of a defoliating plant disease and reduction in yield. *Agric. For. Meteorol.* 47: 273-289.
- Gao, X., A. R. Huete, W. Ni, and T. Miura. 2000. Optical-biophysical relationships of vegetation spectra without background contamination. *Remote Sens. Environ.* 74: 609-620.

- Gitelson, A. A., Y. Gritz, and M. N. Merzlyak. 2003. Relationships between leaf chlorophyll content and spectral reflectance and algorithms for non-destructive chlorophyll assessment in higher plant leaves. *J. Plant Physiol.* 160: 271-282.
- Goudriaan, J. 1977. Crop micrometeorology. A simulation study. *Simulation Monographs*. PUDOC. Wageningen, The Netherlands.
- Goudriaan, J. 1994. Using the exponential growth equation to analyze resource capture. pp. 99-110. *In*: J. L. Monteith, R. K. Scott, and M. H. Unsworth (eds.). *Resource capture by crops*. Nottingham University Press. Nottingham, UK.
- Goudriaan, J. and J. L. Monteith. 1990. A mathematical function for crop growth based on light interception and leaf area expansion. *Ann. Bot.* 66: 695-701.
- Goudriaan, J. and H. M. van Laar. 1994. *Modelling potential crop growth processes: Textbook with exercises (Current Issues in Production Ecology)*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands.
- Huang, D., Y. Knyazikhin, R. E. Dickinson, M. Rautiainen, P. Stenberg, M. Disney, P. Lewis, A. Cescatti, Y. Tian, W. Verhoef, J. Martonchik, and R. B. Myneni. 2007. Canopy spectral invariants for remote sensing and model applications. *Remote Sens. Environ.* 106: 106-122.
- Huete, A. R. 1987. Soil-dependent spectral response in a developing plant canopy. *Agron. J.* 79: 61-68.
- Huete, A. R., R. D. Jackson, and D. F. Post. 1985. Spectral response of a plant canopy with different soil backgrounds. *Remote Sens. Environ.* 17: 35-53.
- Jacquemoud, S., and F. Baret. 1990. PROSPECT: a model of leaf optical properties spectra. *Remote Sens. Environ.* 34: 75-91.
- Jacquemoud, S., F. Baret, B. Andrieu, F. M. Danson, and K. Jaggard. 1995a. Extraction of vegetation biophysical parameters by inversion of the PROSPECT + SAIL models on sugar beet canopy reflectance data. Application to TM and AVIRIS sensors. *Remote Sens. Environ.* 52: 163-172.
- Jacquemoud, S., J. Verdebout, G. Schmuck, G. Andreoli, and B. Hosgood. 1995b. Investigation of leaf biochemistry by statistics. *Remote Sens. Environ.* 54: 180-188.
- Jacquemoud S., S. L. Ustin, J. Verdebout, G. Schmuck, G. Andreoli, and B. Hosgood. 1996. Estimating leaf biochemistry using the PROSPECT leaf optical properties model. *Remote Sens. Environ.* 56: 194-202.
- Le Maire, G., C. François and E. Dufrêne. 2004. Towards universal broad leaf chlorophyll indices using PROSPECT simulated database and hyperspectral reflectance measurements. *Remote Sens. Environ.* 89: 1-28.
- Lewis, P. and M. Disney. 2007. Spectral invariants and scattering across multiple scales from within-leaf canopy. *Remote Sens. Environ.* 109: 196-206.
- Odi, M., F. Paz, R. López y J. González. 2010. Limitaciones en la estimación de variables biofísicas en cultivos usando índices de la vegetación espectrales: efecto de la densidad del follaje. *Agrociencia* 44: 807-819.
- Pascual, F., F. Paz y M. Bolaños. 2012. Estimación de biomasa aérea en cultivos con sensores remotos. *Terra Latinoamericana* 30: 17-28.
- Paz, F., E. Palacios, E. Mejía, M. Martínez y L. A. Palacios. 2005. Análisis de los espacios espectrales de la reflectividad del follaje de los cultivos. *Agrociencia* 39: 293-301.
- Paz, F., E. Palacios, E. Mejía, M. Martínez y L. A. Palacios. 2006. Determinación del estado de crecimiento de cultivos usando la transformada de Hough de las reflectividades del follaje. *Agrociencia* 40: 99-108.
- Paz, F., E. Palacios, M. Bolaños, L. A. Palacios, M. Martínez, E. Mejía y A. Huete. 2007. Diseño de un índice espectral de la vegetación: NDVIcp. *Agrociencia* 41: 539-554.
- Paz, F., A. Zarco, A. Cano, M. Bolaños y M. Odi. 2009a. Un método simple para la estimación de las propiedades geométricas y ópticas de las hojas de la vegetación. *Agrociencia* 43:417-425.
- Paz, F., M. I. Marín, E. López, A. Zarco, M. Bolaños, J. L. Oropeza, M. Martínez, E. Palacios y E. Rubiños. 2009b. Elementos para el desarrollo de una hidrología operacional con sensores remotos: mezcla suelo-vegetación. *Ing. Hidrául. Méx.* 24: 69-80.
- Paz, F., M. Odi L., A. Cano G., M. A. Bolaños G. y A. Zarco H.. 2009c. Equivalencia ambiental en la productividad de la vegetación. *Agrociencia* 43: 635-648.
- Paz, F., M. Reyes y E. Medrano. 2011. Diseño de índices espectrales de la vegetación usando curvas iso-suelo. *Agrociencia* 45: 121-134.
- Pinty, B., N. Gobron, J. L. Widlowski, T. Lavergne, and M. M. Verstraete. 2004. Synergy between 1-D and 3-D radiation transfer models to retrieve vegetation canopy properties from remote sensing data. *J. Geophys. Res.* 109: D21205, doi:10.1029/2004JD005214.
- Pinty, B., N. Gobron, J. L. Wildlowski, S. A. W. Gerstl, M. M. Verstraete, M. Antunes, C. Bacour, F. Gascon, J. P. Gastellu, N. Goel, S. Jacquemoud, P. North, W. Quin, and R. Thomson. 2001. Radiation transfer model intercomparison (RAMI) exercise. *J. Geophys. Res.* 106: 11937-11956.
- Reyes, M., F. Paz, M. Casiano, F. Pascual, M. I. Marín y E. Rubiños. 2011. Caracterización del efecto de estrés usando índices espectrales de la vegetación para la estimación de variables relacionadas con la biomasa aérea. *Agrociencia* 45: 221-233.
- Romero, E., F. Paz, E. Palacios, M. Bolaños, R. Valdez y A. Aldrete. 2009. Diseño de un índice espectral de la vegetación desde una perspectiva conjunta de los patrones exponenciales y lineales del crecimiento. *Agrociencia* 43: 291-307.
- Ross, J. 1981. *The radiation regime and architecture of plant stands*. Kluwer Academic Publisher. The Netherlands.
- Solorio, N., F. Paz, M. Odi y M. Bolaños. 2008. Modelo exponencial del crecimiento y equivalencia ambiental de la productividad de un tomate cultivado en invernadero. *Terra Latinoamericana* 27: 143-151.
- Verhoef, W. 1984. Light scattering by leaf layers with application to canopy reflectance modeling: The SAIL model. *Remote Sens. Environ.* 16: 125-141.
- Yoshioka, H., T. Miura, A. R. Huete, and B. D. Ganapol, 2000. Analysis of vegetation isolines in red-nir reflectance space. *Remote Sens. Environ.* 74: 313-326.
- Zarco, A, F. Paz, E. Palacios, A. Cano, M. Bolaños, F. Pascual, L. A. Palacios, O. Palacios y J. L. Oropeza. 2008, Modelación del efecto de escala espectral en el sistema suelo-vegetación, *Agrociencia* 42: 193-204.