

# ANÁLISIS MULTIFRACTAL DEL CARBONO EN LOS SUELOS

## 2. DIVERGENCIA DE MOMENTOS ESTADÍSTICOS

### Multifractal Analysis of Soil Organic Carbon

### 2. Divergence of Statistical Moments

Fernando Paz Pellat<sup>1‡</sup>, Claudio Balbontín Nesvara<sup>1</sup>, Jorge Etchevers Barra<sup>1</sup>,  
Mario Martínez Menes<sup>1</sup> y Carlos Ortiz Solorio<sup>1</sup>

#### RESUMEN

Se modeló la función de la estructura espacial del carbono orgánico en los suelos (COS) de México, usando la teoría de procesos multifractales. Cuando se tiene un número finito de muestras o de la integración (promedio) de escalas de muestreo, puede presentarse el fenómeno de divergencia de los momentos estadísticos del proceso analizado, lo cual favorece la interpretación del proceso como del tipo monofractal. En este trabajo se revisa técnicamente la divergencia de los momentos estadísticos del COS que sugieren un patrón multifractal. La función de escalamiento universal del proceso multifractal del COS se ajustó usando la restricción de la divergencia de los momentos estadísticos estimados.

*Palabras clave:* funciones de escalamiento multifractal, funciones monofractales, comportamiento espurio de momentos estadísticos.

#### SUMMARY

Modeling of the spatial structure function of soil organic carbon (SOC) in Mexico was performed using the multifractal process theory. In the case of a finite number of samples or the integration (averaging) of sample scales, divergence of statistical moments may appear which can be interpreted as a monofractal process. This study reviews, technically, the divergence of statistical moments of SOC which suggest a multifractal pattern. The universal scaling function of the SOC multifractal process was adjusted using divergence restriction of estimated statistical moments.

<sup>1</sup> Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo. 56230 Montecillo, Estado de México.

<sup>‡</sup> Autor responsable (pellat@colpos.mx)

Recibido: noviembre de 2006. Aceptado: mayo de 2009.

Publicado como nota de investigación en  
Terra Latinoamericana 27: 257-264.

*Index words:* multifractal scaling functions, monofractal functions, spurious behaviour of statistical moments.

#### INTRODUCCIÓN

Para estimar el carbono orgánico en los suelos (COS) se requiere de un número suficiente de observaciones muestrales. En el caso de procesos para interpolar información, las funciones de correlación espacial (funciones de estructura espacial) deben estimarse considerando los comportamientos teóricos asociados a problemas de redondeo de datos o a problemas debidos a la finitud de los tamaños muestrales.

La estimación del COS en los inventarios nacionales de gases efecto invernadero es dependiente de la escala de observación utilizada, por lo que es necesario caracterizar y modelar este efecto en forma teóricamente sólida.

Para las funciones de escalamiento asociadas a los procesos multifractales, la divergencia de los momentos estadísticos explica los comportamientos empíricos observados en su estimación. El considerar la divergencia de los momentos estadísticos es un paso necesario para el ajuste de los parámetros de las funciones de escalamiento universal a partir de los datos.

#### PROCESOS MULTIFRACTALES

Usando variables normalizadas  $f_\lambda$ , i.e valores de la variable divididos entre el promedio, a la escala de máxima resolución, donde:  $\lambda = L/l$ ,  $\lambda > 1$  es la razón de escala entre la dimensión máxima de la región espacial de análisis (L) y la resolución espacial del muestreo (l), los procesos multifractales pueden caracterizarse por su distribución de probabilidad (Pr):

$$\Pr\{f_l \geq I^g\} \approx I^{-C(g)} \quad (1)$$

o por sus momentos estadísticos:

$$E[(f_1)^q] \approx I^{K(q)}, \quad I > 1 \tag{2}$$

donde: el signo  $\approx$  significa igualdad dentro de factores multiplicativos logarítmicos.

Las funciones  $C(\gamma)$  y  $K(q)$  describen el comportamiento probabilístico del proceso multifractal en función de la escala  $\lambda$  (Schertzer y Lovejoy, 1983).

La relación entre  $C(\gamma)$  y  $K(q)$  se reduce a la transformada de Legendre (Parisi y Frisch, 1985) para razones de escala grandes ( $\lambda \gg 1$ ):

$$K(q) = \max_g \{qg - C(g)\} \Leftrightarrow C(g) = \max_q \{qg - K(q)\} \tag{3}$$

Para procesos multifractales continuos, las funciones universales de escalamiento que caracterizan en forma completa a un proceso multifractal conservativo (Schertzer y Lovejoy, 1987, 1989, 1991; Brax y Pechanski, 1991; Kida, 1991) son:

$$C(g) = \begin{cases} C_1 \left( \frac{g}{C_1 a^1} + \frac{1}{a} \right)^{a^1}, & a \neq 1 \\ C_1 \exp\left(\frac{g}{C_1} + 1\right), & a = 1 \end{cases}$$

$$K(q) = \begin{cases} \frac{C_1}{a-1} (q^a - q), & a \neq 1 \\ C_1 q \ln(q), & a = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^1} = 1$$

donde:  $C_1$  = codimensión de la singularidad media del proceso, mide la fractalidad promedio ( $0 \leq C_1 \leq d$ ).  $\alpha$  = índice de Levy ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ), el cual define que tan rápido se incrementa la fractalidad con singularidades más y más grandes. Para  $\alpha = 2$ , el proceso es log normal.

En procesos multifractales no conservativos ( $E[f_1] \neq 1$ ) es necesario introducir un nuevo parámetro en las funciones universales:

$$\begin{aligned} C(g) &\rightarrow C(g + H) \\ K(q) &\rightarrow K(q) - qH \end{aligned} \tag{5}$$

donde: H es un parámetro bautizado en honor a Hurst, que mide el grado de no conservación del proceso ( $0 \leq H \leq 1$ ).

Las funciones de estructura espacial de un proceso multifractal están dadas por:

$$\begin{aligned} E[(\Delta Z_1)^q] &\approx I^{-V(q)} \\ E[(\Delta Z_1)^q] &= E\left[|Z_1(x) - Z_1(x+h)|^q\right] \\ V(q) &= qH - K(q) \end{aligned} \tag{6}$$

donde:  $E[(\Delta Z_\lambda)^q]$  es llamada función de estructura (Monin y Yaglom, 1975) y  $\zeta(1) = H$ .

### DIVERGENCIA DE MOMENTOS ESTADÍSTICOS

El problema de divergencia de los momentos estadísticos de multifractales (Schertzer y Lovejoy, 1989; Tessier *et al.*, 1993; Lavallée *et al.*, 1993) se manifiesta en la distribución de probabilidad del proceso como:

$$\begin{aligned} \Pr\{f > s\} &\approx s^{-q_d}, \quad s \gg 1 \\ E[\varphi^q] &= \infty, \quad q \geq q_d \end{aligned} \tag{7}$$

donde:  $q_d = C'(\gamma_d)$  es la pendiente absoluta de la caída algebraica de la distribución de probabilidad (la cola larga) y define el momento crítico de divergencia de los momentos estadísticos.

Para entender este comportamiento de divergencia de los momentos estadísticos, es importante enfatizar que las cascadas multiplicativas continuas tienen las propiedades definidas en el límite (cuando el número de pasos tiende a infinito) y son cascadas “desnudas”, en el sentido de que representan un proceso físico (o simplemente conveniente) iterado hasta su escala de disipación. En las mediciones que se efectúan sobre un proceso, las observaciones están “vestidas” (de allí el subíndice d de “dressed”, en inglés), ya que están promediadas (integradas) a la escala de observación que utilizamos. Debido a esta “vestimenta” se presenta la divergencia de los momentos estadísticos, la cual exhibe un comportamiento dado por:

$$K(q_d) = (q_d - 1)d \tag{8}$$

donde: d es la dimensión “efectiva” de “vestirse” del proceso (d es el espacio de análisis).

Otro fenómeno asociado a la divergencia de los momentos estadísticos es la finitud del número de realizaciones del proceso en el muestreo, donde se observa un valor finito de las singularidades (el proceso teórico no está acotado). A medida que se tienen más observaciones del proceso (diferentes tiempos o simulaciones), es posible observar valores más extremos (singularidades). El momento máximo observable, dependiente de la dimensión del muestreo, está dado por  $q_s$  (donde el subíndice s es de “sampling”, en inglés).

Así, para procesos multifractales conservativos, el orden del momento estadístico máximo está dado por:

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \min(q_d, q_s) \\ \frac{C_1}{a-1} \frac{q_d^a - q_d}{q_d - 1} &= d \\ q_s &= \left[ \frac{d + Ds}{C_1} \right]^{1/a} \end{aligned} \tag{9}$$

donde: Ds es la dimensión del muestreo (Ds = 0 para una sola realización) y  $q_d$  se estima en forma numérica.

Si  $\gamma$  está limitada por  $\gamma_{\max}$ , entonces hay un  $q_{\max} = C'(\gamma_{\max})$  tal que  $K(q > q_{\max})$  exhibe un comportamiento lineal (no hay espacio suficiente para promediar estos valores extremos). Así, y usando la transformada de Legendre, se tiene que:

$$\begin{aligned} K(q) &= \begin{cases} g_{\max}(q - q_{\max}) + K(q_{\max}) = \\ qg_{\max} - C(g_{\max}), & q \geq q_{\max} \\ K(q), & q < q_{\max} \end{cases} \\ C(g) &= \begin{cases} q_{\max}(g - g_{\max}) + C(g_{\max}) = \\ gq_{\max} - K(q_{\max}), & q \geq q_{\max} \\ C(g), & q < q_{\max} \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

En el caso de la existencia de un  $\gamma_{\min}$ , diferente de cero, para un número finito de muestras,  $\gamma \leq \gamma_{\min}$ , la función  $K(q)$  también presenta un comportamiento lineal (Tessier *et al.*, 1994). Para este caso, las relaciones de las funciones de escalamiento son iguales a las mostradas para las singularidades y órdenes de momentos máximos.

El comportamiento “hiperbólico” mostrado en la distribución de probabilidad de un proceso multifractal (Ecuación 7) se ha usado como argumento para un modelo monofractal (aditivo). En este caso, el proceso se construye por la suma de “pulsos”, usando distribuciones Levy-estables (en los procesos multiplicativos el generador sigue una distribución Levy-estable). Las funciones de estructura para procesos monofractales no truncados y con límites ergódicos (Schmitt *et al.*, 1999) están dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Movimiento browniano} &\Rightarrow V(q) = \frac{q}{2} \\ \text{Movimiento browniano fraccional} &\Rightarrow V(q) = q \left( p - \frac{1}{2} \right) \\ \text{Movimiento de Levy} &\Rightarrow V(q) = \begin{cases} \frac{q}{a}, & q < a \\ 1, & q \geq a \end{cases} \\ \text{Movimiento de Levy fraccional} &\Rightarrow V(q) = \begin{cases} q \left( p - 1 + \frac{1}{a} \right), & q < a \\ q(p-1) + 1, & q \geq a \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

donde: p define el orden de una integración fraccional y  $\zeta(1) = H$ .

Puesto que la variable gaussiana o normal (movimiento browniano) es un caso especial de las variables Levy-estables ( $\alpha = 2$ ), a partir del movimiento Levy fraccional es posible generar los demás procesos: movimiento de Levy ( $p = 1$ ), movimiento browniano fraccional ( $\alpha = 2$ ) y movimiento browniano ( $p = 1$  y  $\alpha = 2$ ).

En los procesos monofractales, el índice  $\alpha$  de Levy ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ) se estima de la cola larga de la distribución de probabilidad,  $q_d = \alpha$  en la Ecuación 7. Así, un valor de  $q_d > 2$  es evidencia de la multifractalidad de un proceso.

### APLICACIÓN DE LA DIVERGENCIA DE MOMENTOS ESTADÍSTICOS: DISTRIBUCIÓN DEL CARBONO ORGÁNICO EN LOS SUELOS DE MÉXICO

Usando funciones de estructura espacial, se analizó una base de datos de COS (SEMARNAT-CP, 2001-2002) para estimar los parámetros de la función

de escalamiento universal (proceso continuo), de acuerdo con las Ecuaciones 4 y 7 para procesos no conservativos. Esta base de datos informa sobre la localización geográfica y el contenido de carbono orgánico (kg m<sup>-2</sup>). El soporte muestral es un volumen aproximado de 20 x 20 cm en área y 20 cm de profundidad (0.008 m<sup>3</sup>). El número de muestras es de 4583 y el rango de la distancia de separación entre las muestras es 524.5 m ≤ h ≤ 3 274 751.0 m.

La Figura 1 muestra la función ζ(q) estimada, donde se observa un comportamiento lineal para momentos de orden aproximadamente q ≤ q<sub>min</sub> ≈ 0.6 y q ≥ q<sub>max</sub> ≈ 2.8, asociados a la divergencia de los momentos estadísticos. El valor de H se estimó de H = ζ(1) = 0.1196.

Para analizar la divergencia de los momentos estadísticos en la cola larga de la distribución de probabilidad de ΔZ<sub>h</sub>, se realizó un análisis similar al de la Ecuación 7 para distancias h seleccionadas. La Figura 2 muestra el patrón general que se obtiene, gráfica log-log, de los datos analizados. Se observa que cuando ΔZ<sub>h</sub> tiene valores grandes (s >> 1) el número de datos disponibles es pequeño, por lo que el comportamiento lineal tiende a ser enmascarado. Para evitar este tipo de problema asociado al número de datos disponible, se seleccionó el rango 17 kg m<sup>-2</sup> CO ≤ ΔZ<sub>h</sub> ≤ 68 kg m<sup>-2</sup> CO en el análisis. La Figura 3 muestra los resultados obtenidos según h.

De análisis similares al mostrado en la Figura 6 se estimó q<sub>i</sub> = 2.844 ± 0.072, donde el valor a la derecha

del signo ± corresponde a una desviación estándar, mientras que el valor a la izquierda es la media.

Definidos los valores q<sub>min</sub> y q<sub>max</sub>, se ajustaron los datos experimentales a la función universal de ζ(q) (Ecuaciones 4 y 7). Para esto se empleó el procedimiento que utiliza la función f(q) definida como (Schmitt *et al.*, 1995; Liu y Molz, 1997):

$$f(q) = qV'(0) - V(q) = \frac{C_1}{a-1} q^a \tag{12}$$

donde: la derivada de ζ(0) es aproximada por diferencias finitas de:

$$V'(0) = \frac{V(q) - V(0)}{q} \tag{13}$$

La ventaja de usar f(q) permite estimar en forma directa a α, al considerar la pendiente de una gráfica log-log y con este valor calcular a C<sub>1</sub> de la intersección de la recta (Ecuación 12). La Figura 4 muestra los resultados obtenidos usando diferentes valores de q para aproximar la derivada de ζ(q) dada por la Ecuación 13. El comportamiento no convergente de α observado es producto de la linealidad de la función ζ(q) para q ≤ q<sub>min</sub> (divergencia de momentos).

La alternativa utilizada para estimar α y C<sub>1</sub> fue realizar una regresión no lineal, minimizando el error cuadrático de estimación. Para esto, se usó la función SOLVER de EXCEL<sup>MR</sup>, la cual produjo resultados aceptables y no tuvo problemas de divergencia numérica.

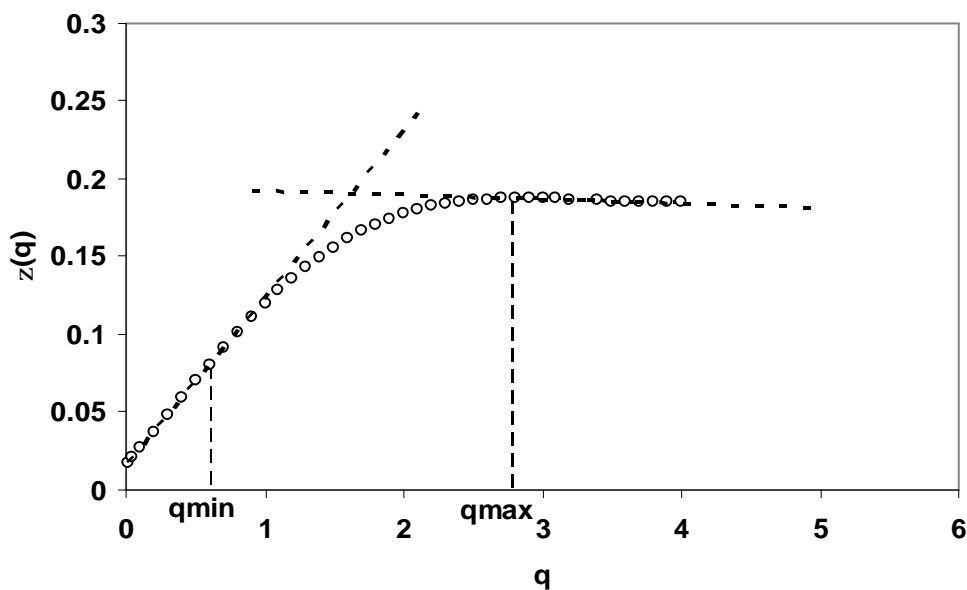


Figura1. Patrón experimental de la función ζ(q) y divergencia de momentos estadísticos.

Los valores estimados, usando los datos entre  $q_{\min}$  y  $q_{\max}$  y analizando el efecto de cambiar estos límites en un rango pequeño, fueron  $\alpha = 1.83 \pm 0.06$  y  $C_1 = 0.03305 \pm$

0.0007. La Figura 5 muestra el ajuste experimental obtenido con estos parámetros. Se aprecia que los estimados de  $q_{\min}$  y  $q_{\max}$  definen pendientes (derivadas) de la función ajustada, de acuerdo con lo establecido anteriormente con relación a la transformada de Legendre.

La linealidad mostrada para valores de  $q \leq 1.0$  de la Figura 5 sugiere que es aplicable un modelo monofractal, con la perspectiva de los procesos multifractales, el caso  $\alpha = 0$ , llamado modelo  $\beta$  (Novikov y Stewart, 1964; Mandelbrot, 1974; Frisch *et al.*, 1978) tiene una función de estructura:

$$V(q) = C_1 + (H - C_1)q \tag{14}$$

La Figura 6 muestra este comportamiento para  $q \leq 1.0$  de  $\zeta(q)$ , que da un valor de  $C_1 = 0.0165$

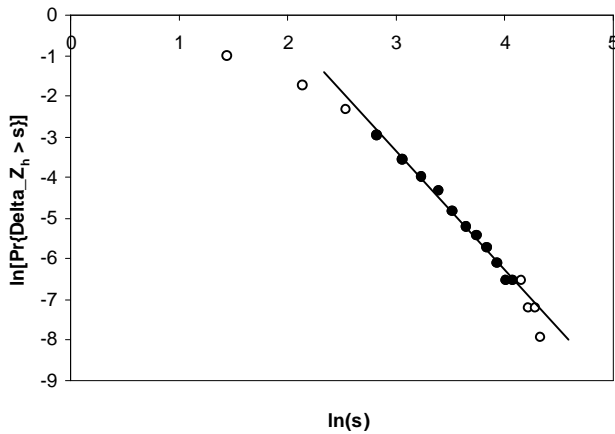


Figura 2. Patrón experimental de la cola larga de la distribución de probabilidad.

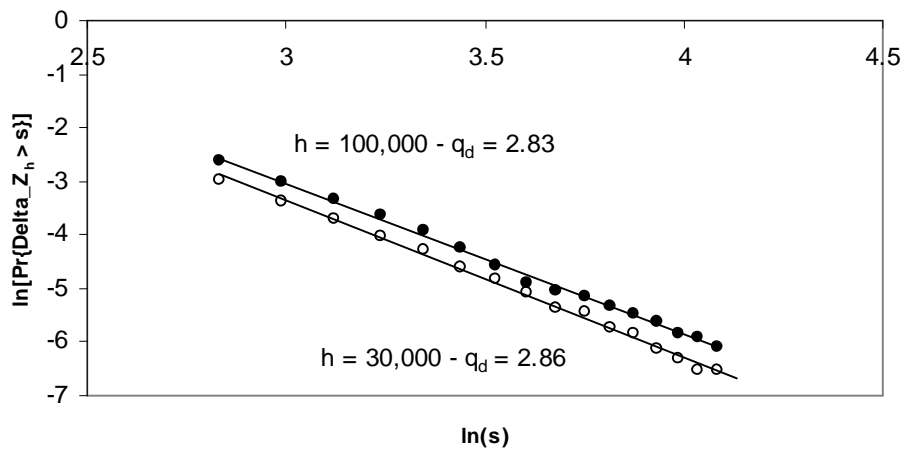


Figura 3. Estimación de  $q_d$  para valores de  $h$  selectos.

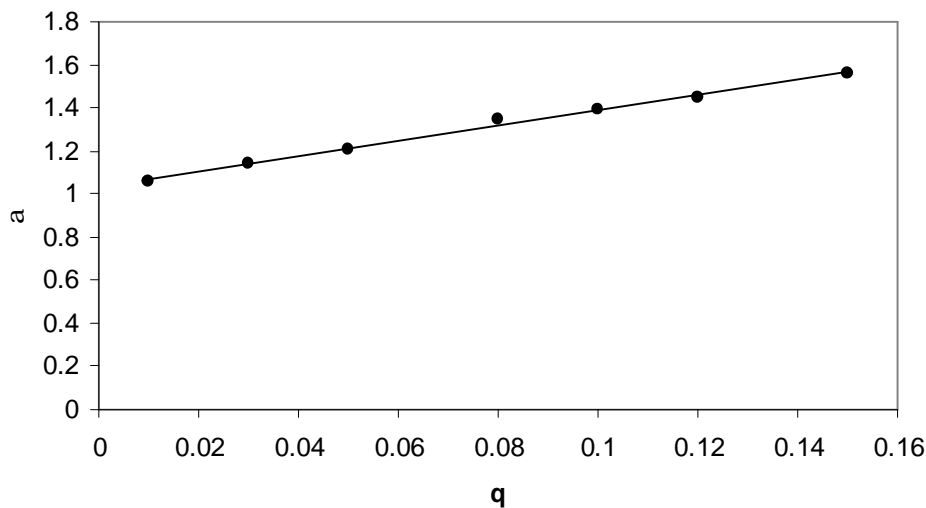


Figura 4. Estimación de  $\alpha$  usando diferentes valores de  $q$  para aproximar  $\zeta'(q)$ .

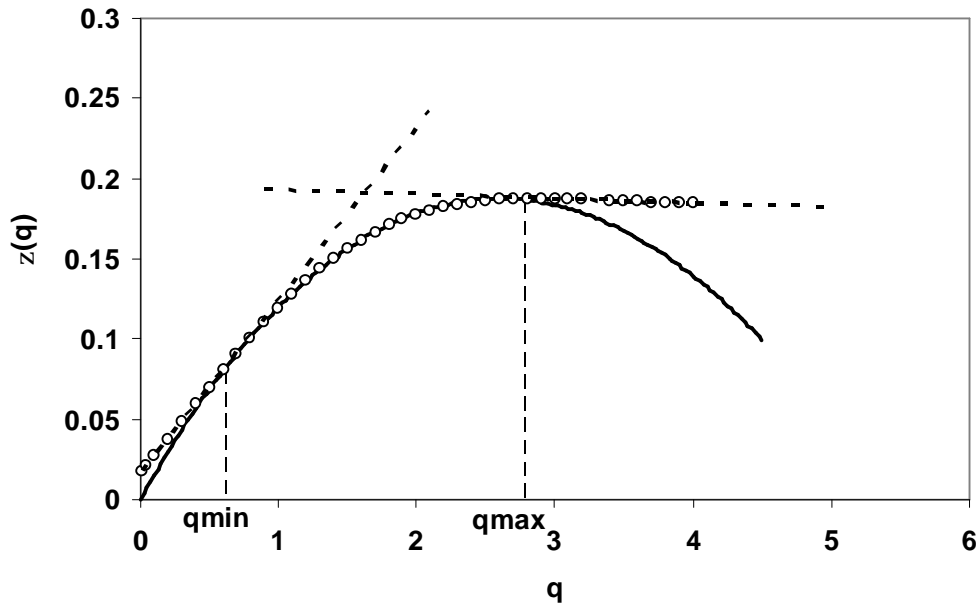


Figura 5. Función universal de  $\zeta(q)$  estimada ( $H = 0.12$ ,  $\alpha = 1.83$  y  $C_1 = 0.033$ ).

y  $H = 0.1214$ . Aunque el ajuste es bueno, el comportamiento observado es producto del valor mínimo en la base de datos que define una divergencia de momentos.

Usando como referencia una cascada multiplicativa binomial, donde la densidad se transmite de la escala mayor a la menor, usando valores multiplicativos (generadores) que producen dos singularidades en cada paso de la cascada, el modelo  $\beta$  se genera de una cascada en la cual la densidad se transfiere completa a un subintervalo inferior de la cascada y el otro tiene valor nulo. Así, el modelo  $\beta$  representa el caso de transferencia de todo o nada en los pasos de la cascada,

por lo que su sentido físico es cuestionable. Para entender que el patrón mostrado en las Figuras 5 y 6 es sólo producto de los valores mínimos de  $\Delta Z_h$ , la Figura 7 muestra la misma gráfica de la Figura 6, pero con la condición de no tomar en cuenta los valores de cero de  $\Delta Z_h$ . En este caso, la codimensión del promedio,  $C_1$ , es prácticamente cero.

Ninguno de los modelos monofractales (aditivos) discutidos alcanza evidencia experimental, por lo que el modelo multifractal presentado se seleccionó como adecuado para usarse al definir la función multi-escalamiento del contenido de materia orgánica en los suelos.

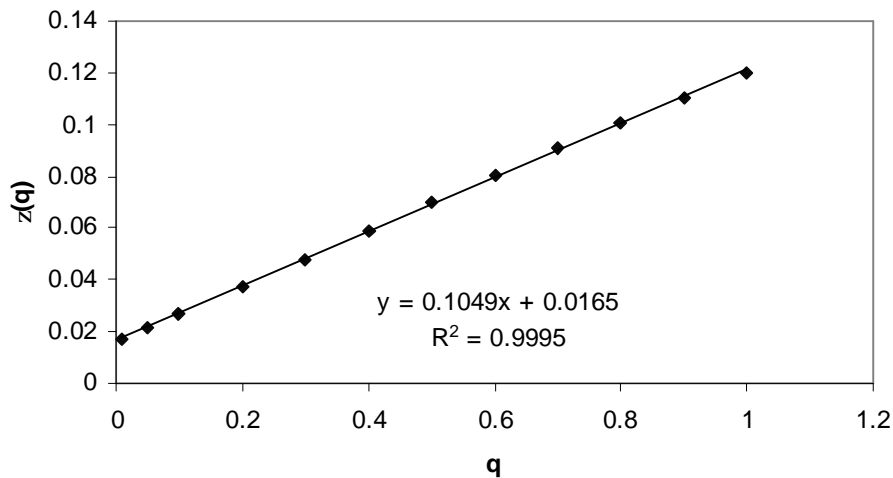


Figura 6. Modelo  $\beta$  ajustado para  $q \leq 1.0$ .

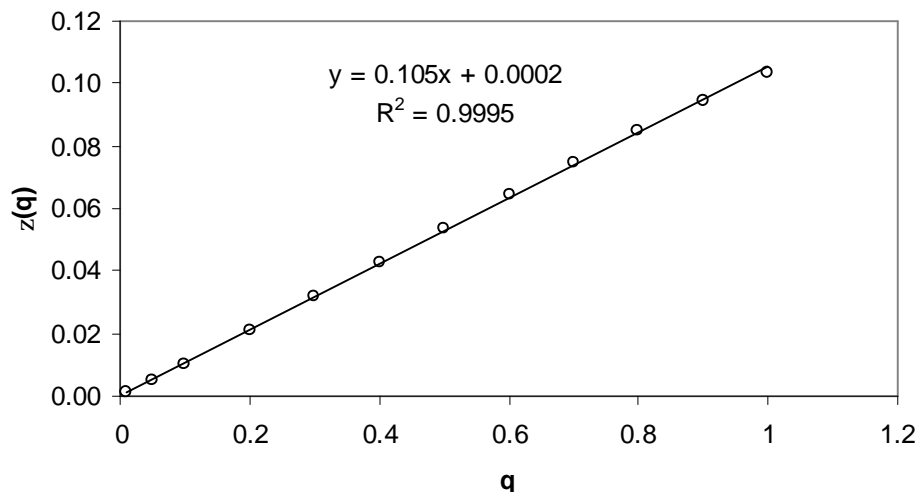


Figura 7. Función  $\zeta(q)$  estimada al no considerar valores  $\Delta Z_h = 0$ .

## CONCLUSIONES

- La divergencia de los momentos estadísticos de los procesos estocásticos puede interpretarse como evidencia a favor de un comportamiento fractal (monofractal), por lo que debe entenderse, en forma clara, que estos patrones son consecuencia de las limitaciones del muestreo y la integración (promediado) de la escala del muestreo.
- En este trabajo se analizaron a detalle los patrones de divergencia de los momentos estadísticos del carbono orgánico en los suelos (COS) en México (2001-2002) y los resultados se usaron para acotar el ajuste a la función universal de escalamiento de la estructura espacial del proceso multifractal modelado.
- La evidencia experimental mostrada soporta un modelo multifractal del comportamiento espacial y escalante del COS en los suelos mexicanos.

## LITERATURA CITADA

- Brax, P. and R. Pechanski. 1991. Levy stable law description on intermittent behaviour and quark gluon plasma phase transitions. *Phys. Lett. B* 253: 225-230.
- Frisch, U., P. L. Sulem, and M. Nelkin. 1978. A simple dynamical model of intermittency in fully developed turbulence. *J. Fluid Mechanics* 87: 719-736.
- Kida, S. 1991. Log-stable distribution and intermittency of turbulence. *J. Phy. Soc. Jpn.* 60: 5-8.
- Lavallée, D., S. Lovejoy, D. Schertzer, and P. Ladoy. 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. pp. 158-192. *In: N. S. N. Lam and L. De Cola (eds.). Fractals in Geography.* Prentice Hall. Old Tappan, NJ, USA.
- Liu, H. H. and F. J. Molz. 1997. Multifractal analysis of hydraulic conductivity distributions. *Water Resour. Res.* 33: 2483-2488.
- Mandelbrot, B. B. 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mechanics* 62: 331-358.
- Monin, A. S. and A. M. Yaglom. 1975. *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence.* MIT Press. Boston, MA, USA.
- Novikov, E. A. and R. Stewart. 1964. Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy dissipation. *Izv. Akad. Nauk SSSR Serie Geophys.* 3: 408-412.
- Parisi, G. and U. Frisch. 1985. A multifractal model of intermittency. pp. 84-88. *In: M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi (eds.). Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics.* Publ. North-Holland. Amsterdam, The Netherlands.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. 1983. The dimension and intermittency of atmospheric dynamics. pp. 7-33. *In: B. Launder (ed.). Turbulence Shear Flows 4.* Springer-Verlag. Karlsruhe, Germany.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. 1987. Physically based rain and cloud modeling by anisotropic multiplicative turbulent cascades. *J. Geophys. Res.* 92: 9693-9714.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. 1989. Nonlinear variability in geophysics: multifractal analysis and simulation. pp. 49-63. *In: L. Pietronero (ed.). Fractals: physical origin and consequences.* Plenum. New York, NY, USA.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. 1991. Nonlinear geodynamical variability: multiple singularities, universality and observables. pp. 41-82. *In: D. Schertzer and S. Lovejoy (eds.). Non-linear variability in geophysics: scaling and fractals.* Kluwer. Dordrecht, The Netherlands.
- Schmitt, F., S. Lovejoy, and D. Schertzer. 1995. Multifractal analysis of Greenland ice-core project climatic data. *Geophys. Res. Lett.* 22: 1689-1692.
- Schmitt, F., D. Schertzer, and S. Lovejoy. 1999. Multifractal analysis of foreign exchange data. *Appl. Stoch. Models Data Anal.* 15: 29-53.

SEMARNAT-CP (Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales-Colegio de Postgraduados). 2001-2002. Evaluación de la degradación de los suelos causada por el hombre en la República Mexicana, a escala 1:250 000. Memoria Nacional. México, D.F.

Tessier, Y., D. Schertzer, and S. Lovejoy. 1993. Universal multifractals: theory and observations for rain and clouds. *J. Appl. Meteor.* 32: 223-250.

Tessier, Y., S. Lovejoy, and D. Schertzer. 1994. Multifractal analysis and simulation of the global meteorological network. *J. Appl. Meteor.* 33: 1572-1586.