

# MODELO MATEMÁTICO PARA ESTIMAR EL ESPACIAMIENTO ENTRE DRENES SUBTERRÁNEOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO

## Mathematical Model for Estimating Spacing Between Subterranean Drains in Transitory Regime

Pablo Miguel Coras-Merino<sup>1</sup>

### RESUMEN

Para el diseño de sistemas de drenaje subterráneo existen diferentes modelos, tanto para régimen permanente, como transitorio; sin embargo, la mayoría de ellos no se han obtenido para condiciones de suelo y clima semiáridas. Por lo tanto, este trabajo tuvo como objetivo desarrollar una ecuación empírica para régimen transitorio que permitiera determinar el espaciamiento entre drenes paralelos, considerando los intervalos de riego durante el ciclo vegetativo, lo que se denomina criterio de equilibrio dinámico y carga instantánea y comparar los resultados con los obtenidos con las ecuaciones de Glover-Dumm. Se determinó la conductividad hidráulica, la profundidad a que debe mantenerse el nivel freático (NF), el perímetro mojado de los drenes, el calendario de riego y la profundidad de los drenes, como un criterio de diseño. La ecuación diferencial parcial parabólica que se analiza es la ecuación de difusión aplicada al flujo del agua en medio poroso. Esta ecuación permite describir el problema del ascenso y descenso del nivel freático en el tiempo. Para la solución de la misma se recurrió a un esquema de diferencias finitas explícito. De acuerdo con los resultados obtenidos, en el cálculo del espaciamiento entre drenes paralelos parcelarios, con las ecuaciones de Glover-Dumm (66 m) y la obtenida con el modelo (68 m), existe una diferencia de 2 m, lo que indica que ambas ecuaciones estiman satisfactoriamente el espaciamiento entre drenes bajo el criterio del equilibrio dinámico. No obstante, debe resaltarse que las variaciones del nivel freático, estimadas con el método propuesto, se mantuvieron todo el ciclo vegetativo del cultivo por debajo del NF máximo admisible.

*Palabras clave:* drenaje agrícola, diferencias finitas.

<sup>1</sup> Departamento de Irrigación, Universidad Autónoma Chapingo, 56230 Chapingo, estado de México. (mpcoras@correo.chapingo.mx)

Recibido: agosto de 2004. Aceptado: febrero de 2006.  
Publicado en *Terra Latinoamericana* 24: 383-390.

### SUMMARY

For the design of subterranean drainage systems there are different models for both permanent and transitory regimes. However, most of them were not obtained for tropical conditions of soil and climate. Therefore, this study was conducted to develop an empirical equation for transitory regime that would determine the spacing between parallel drains under conditions of dynamic equilibrium and instant discharge, and to compare the results obtained with the Glover-Dumm equations. To this end, field data were collected from the property of the *ejido* San Martín Netzahualcoyotl where hydraulic conductivity, depth at which the water table should be kept, wet perimeter of the drains, and irrigation schedule were determined; drain depth was a design criterion. The partial parabolic differential equation analyzed is the equation of diffusion applied to water flow in a porous medium. This equation permits the description of the problem when the water table rises and falls over time. For the solution, a scheme of explicit finite differences was used. According to the results obtained in the calculation of spacing between parallel field drains by the Glover-Dumm equations (66 m) and that obtained by the model (68 m), there is a difference of 2 m, indicating that both equations satisfactorily estimate drain spacing under the criterion of dynamic equilibrium. Nevertheless, it should be highlighted that the variations in the water table estimated by the proposed method were kept below the maximum acceptable water table during the entire vegetative cycle of the crop.

*Index words:* farmland drainage, finite differences.

### INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático para determinar el espaciamiento de drenes paralelos para régimen variable y carga instantánea, aplicada en terrenos agrícolas con problema de drenaje en zonas irrigadas o en el lavado de suelos salinos.



El mejoramiento del drenaje parcelario representa una de las formas de recuperación de tierras agrícolas. Éste cobra especial relevancia cuando dichas tierras se ubican en zonas de climas de alto potencial productivo que, una vez recuperadas, pueden dedicarse a cultivos intensivos.

La condición de drenaje interno restringido consiste básicamente en la presencia, en el suelo, de una capa freática permanente o temporal en la zona radicular de las plantas. Este exceso de humedad produce una restricción del crecimiento vegetal, de moderada a muy fuerte, como consecuencia de un inadecuado intercambio gaseoso. En adición, otros factores que pueden impedir el normal desarrollo de las plantas, como es un elevado contenido de sales en el suelo o la mayor susceptibilidad a enfermedades radiculares, aspectos que habitualmente se asocian a las condiciones de mal drenaje. Por lo tanto, para la recuperación de estos suelos e incrementar el rendimiento agrícola en estas áreas, es indispensable el diseño de un sistema de drenaje.

El elemento más relevante en las especificaciones de una red de drenaje parcelario es, sin duda, el espaciamiento de los drenes, el cual debe adaptarse a las condiciones hidráulicas particulares del terreno. El sistema de drenaje instalado será capaz de evacuar el exceso de agua con la velocidad suficiente para evitar el daño que ocasionaría a las plantas. Para determinar un espaciamiento adecuado es posible utilizar la experiencia acumulada por diversos investigadores e ingenieros, quienes la sintetizan en ecuaciones de diseño.

Las pérdidas de aplicación del agua de riego en el campo incluyen los escurrimientos superficiales y la percolación. Estas últimas varían considerablemente, dependiendo del tipo de suelo, grado de nivelación, trazado de la red y pericia del operador. De la cantidad total de agua aplicada durante la estación de cultivo, puede considerarse de 30 a 40% como una estimación razonable de pérdidas en el riego por gravedad. En el riego por aspersión, este porcentaje puede considerarse de 25 (Kessler, 1977). Estas pérdidas no se distribuyen uniformemente a lo largo de la estación de crecimiento: es más elevado el porcentaje durante las fases iniciales del mismo e inferior durante periodos restantes de crecimiento, cuando el sistema radicular está bien desarrollado y se tiene un valor constante de las pérdidas por percolación mensuales. La cuantía de estas pérdidas, para el criterio de diseño, la descarga es de 30 a 40% del total de agua de riego para el cultivo, dividido por

el número de días de drenaje, en el caso del riego por gravedad.

La lámina de agua que se percola en el suelo muchas veces sirve como dosis de lavado de las sales en el perfil, pero en otras ocasiones crea problemas de sobrehumedecimiento y, por lo tanto, debe mantenerse a una profundidad que no afecte los cultivos agrícolas. Para ello, es necesario el diseño de sistemas de drenaje.

El espaciamiento de los drenes en el campo constituye la variable de mayor relevancia en el diseño de una red de drenaje. De acuerdo con la ley de Darcy, el movimiento del agua en el suelo en condiciones de saturación ocurre en función de la carga hidráulica y de la conductividad hidráulica (IMTA-UACH-CNA, 1998).

Existen numerosas aplicaciones de la ley de Darcy para resolver el espaciamiento de los drenes (Luthin, 1974). Cada una de ellas representa soluciones para condiciones particulares del terreno en cuestión, en especial en lo que se refiere a la profundidad de la capa impermeable en el lugar y las condiciones de recarga del manto freático.

Los cálculos de drenaje para áreas regadas pueden hacerse con fórmulas de drenaje para régimen permanente. Sin embargo, el uso de fórmulas para régimen transitorio ofrece una interesante aproximación a lo que puede realmente ocurrir en la práctica.

Según Pizarro (1985), las fórmulas de régimen transitorio consideran el movimiento de la capa freática durante la recarga y descarga del acuífero. Las distintas situaciones que pueden presentarse son: carga instantánea del acuífero (riego por gravedad), la fórmula de Glover-Dumm estudia esta situación; carga continua e intermitente (lluvia y riego por aspersión), se estudia aplicando la fórmula de Kraijenhoff van de Leur-Maasland, bajo el principio de superposición.

Wesseling (1978) señaló que la ecuación de Glover-Dumm se utiliza, en particular, para el cálculo del espaciamiento entre drenes en zonas regables; para su empleo es necesario determinar las propiedades del suelo, la conductividad hidráulica saturada, la porosidad drenable, la altura del nivel freático, la geometría de los drenes y los criterios de drenaje.

Barragan (1981) indicó que la hipótesis del método del equilibrio dinámico es que los drenes no pueden desaguar el agua de percolación entre riego y riego, sino que se plantea el drenaje de forma que toda el agua que percola durante la campaña de riego se evacúa, en conjunto, a lo largo de la misma. Es decir, al nivel freático



(NF) se le permite ascender en el tiempo hasta una altura máxima admisible por el cultivo.

Siguiendo el concepto de equilibrio dinámico se permite a la capa freática ascender gradualmente durante el programa de riegos hasta que alcance su altura máxima permisible, al final de la estación o al final del periodo de máximo consumo. Sin embargo, durante el próximo barbecho o periodo sin riego, la capa freática descenderá nuevamente hasta el nivel de los drenes aproximadamente (Dumm y Winger, 1963).

En este caso, el criterio es que la descarga anual iguale a la recarga anual. Si no fuese así, la capa freática ascendería en el curso de algunos años, alcanzando un nivel de equilibrio que afectaría al crecimiento óptimo del cultivo. Sin embargo, durante la estación de riegos, y en especial durante el periodo de máximo consumo de los cultivos, la descarga de los drenes es menor que la recarga, lo cual ocasiona el ascenso de la capa freática, permaneciendo por debajo del nivel permisible.

La presente investigación tiene como objetivos: a) desarrollar una ecuación empírica para régimen transitorio que permitiera determinar el espaciamiento entre drenes paralelos, en condiciones de equilibrio dinámico y carga instantánea; y b) comparar los resultados obtenidos con las ecuaciones de Glover-Dumm y el modelo empírico propuesto

## MATERIALES Y MÉTODOS

Para explicar el proceso de cálculo de espaciamiento entre drenes, se desarrolló un ejemplo con datos de campo de los terrenos ejidales de San Martín Netzahualcoyotl, que se encuentra dentro del valle de México, parte sur de la Mesa Central de la República Mexicana, comprendida dentro de las coordenadas geográficas 19° 22' y 19° 87' N y 98° 53' y 99° 03' O, con un altitud media de 2230 m; se determinaron la conductividad hidráulica, la profundidad a que debe mantenerse el NF, el perímetro mojado de los drenes, el calendario de riego y la profundidad de instalación de los drenes. La característica a calcular es el espaciamiento entre drenes (Figura 1).

El cálculo se hace por aproximaciones sucesivas, suponiendo un cierto espaciamiento. Se asume que antes del primer riego, el nivel freático (NF) es horizontal y se encuentra al nivel de los drenes. El primer riego ocasionará una elevación del nivel freático ( $H_0$ ). Si el intervalo entre riego es de "n" días; antes del segundo

riego el NF habrá descendido hasta una altura  $H_1$ , calculada con la fórmula empírica propuesta y con la ecuación de Glover-Dumm. Se aplica el segundo riego y el NF se eleva nuevamente a una altura  $H_{01}$ . De esta manera, la capa freática fluctúa en el tiempo y se eleva con cada riego y se descende en el intervalo entre riegos, a una altura ( $H_1$ ) que cada vez es mayor; este proceso continúa hasta alcanzarse una situación de equilibrio.

La ecuación de Glover-Dumm se dedujo, inicialmente, para un acuífero homogéneo y de espesor constante, en el que instantáneamente ha ascendido el manto freático, debido a una elevación del nivel del agua libre en zanjas que llegan hasta la capa impermeable. Una vez cesada la recarga, el nivel freático comienza a descender por efecto del drenaje, siendo las condiciones de régimen transitorio (Figura 2).

Para el cálculo del espaciamiento de drenes, Glover-Dumm propuso la ecuación (Pizarro, 1985):

$$L^2 = \frac{\pi^2 K D t}{\mu \ln \left( 1.16 \frac{h_0}{h_1} \right)} \quad (1)$$

donde: L = espaciamiento entre drenes (m); K = conductividad hidráulica saturada ( $m\ d^{-1}$ ); D = valor medio de nivel freático en un tiempo determinado (m); t = tiempo (días);  $\mu$  = porosidad drenable (adimensional);  $h_0$  = altura máxima del NF sobre los drenes (m);  $h_1$  = altura mínima del NF sobre los drenes (m).

Para determinar la efectividad de la ecuación propuesta se realizó una comparación con los resultados obtenidos con la ecuación de Glover-Dumm. En ambos casos se representaron las variaciones del nivel freático para cada riego en una gráfica  $H_0$  contra tiempo, lo que permitió definir si los espaciamientos calculados con los modelos anteriores son adecuados para mantener los mantos freáticos por debajo del nivel freático máximo admisible.

La ecuación diferencial parcial parabólica que se analiza es la ecuación de difusión aplicada al flujo del agua en medio poroso. Esta ecuación permite describir el problema del ascenso y descenso del nivel freático en el tiempo (Burden, 2002).

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \theta^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2)$$



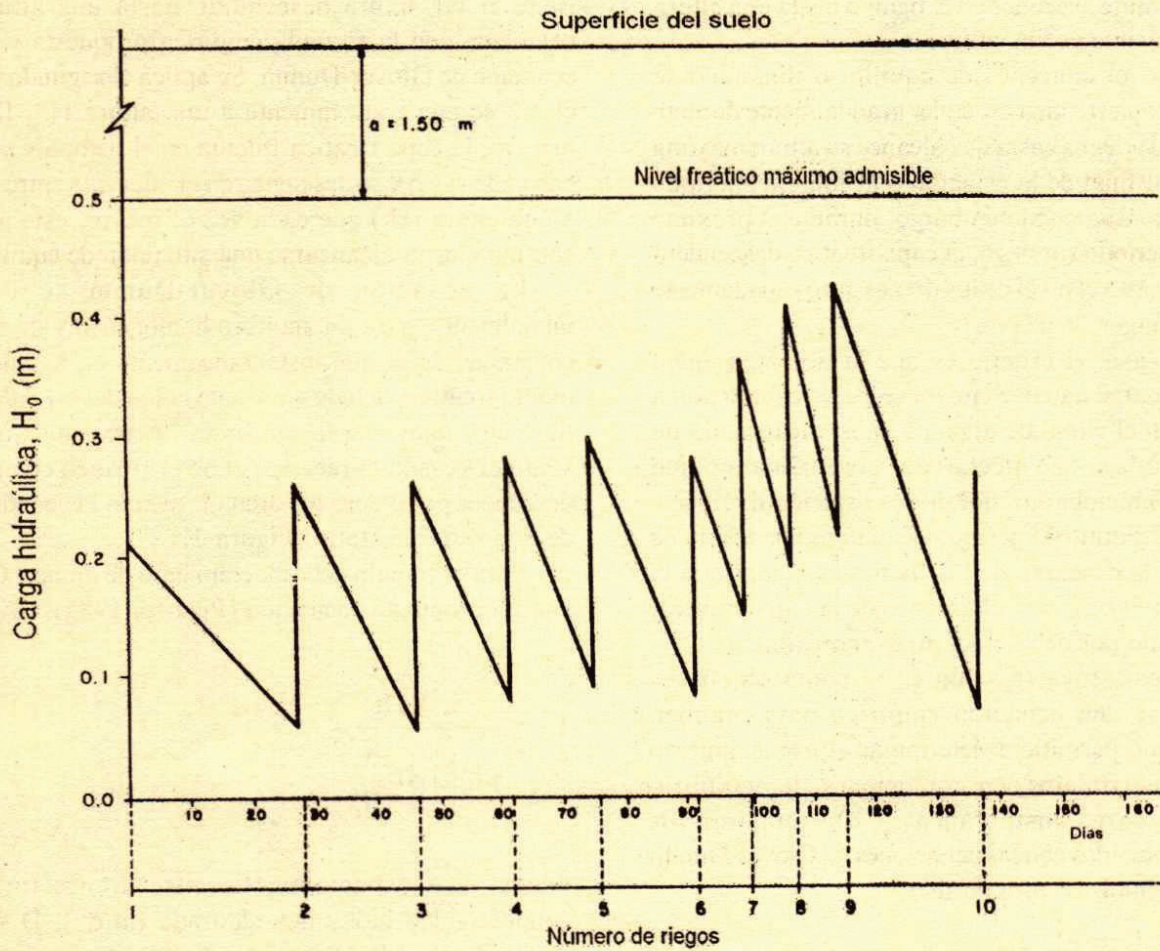


Figura 1. Componentes del flujo y esquema para el cálculo del espaciamiento entre drenes.

donde:  $h$  = la carga,  $t$  = el tiempo,  $x$  = la distancia; y  $\theta^2$  se define como:

$$\theta^2 = \frac{KH}{\mu} \tag{3}$$

donde:  $K$  = conductividad hidráulica ( $m\ d^{-1}$ );  $\bar{H}$  = nivel medio del agua en el centro entre drenes para el tiempo  $t = 0$  equivalente a la profundidad crítica del nivel freático (m);  $\mu$  = porosidad drenable, adimensional.

La Ecuación 2 es diferencial parcial lineal de segundo orden parabólico; ya que al comparar las Ecuaciones 2 y 4, se tiene la Ecuación 5.

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi + G = 0 \tag{4}$$

$$A = 0; B = 0; C = 0.$$

$$B^2 - 4AC = 0 \tag{5}$$

Para resolver las ecuaciones diferenciales anteriores, se recurrió a un esquema de diferencias finitas explícito;

representando a  $\frac{\partial h}{\partial t}$  en función de una derivada hacia

delante y, aplicando la serie de Taylor en  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ , se tiene:

$$f''(x) = \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \theta_3(\Delta x^4) \tag{6}$$

o bien:



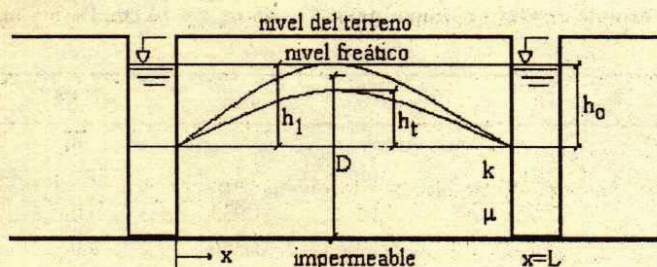


Figura 2. Geometría y símbolos utilizados en el modelo de Glover Dumm.

$$h(x, t + \Delta t) - h(x, t) = \frac{\theta^2}{\Delta x^2} \frac{h(x - \Delta x, t) - 2h(x, t) + h(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (7)$$

Con el objetivo de simplificar se propuso la nomenclatura:

$$x = V\Delta x$$

$$t = y\Delta t$$

$$h(x, t) = H(V\Delta x, y\Delta t) = H_{o\Delta x}$$

$$(x + \Delta x) = (V + 1)\Delta x$$

$$(t + \Delta t) = (y + 1)\Delta t$$

$$(x - \Delta x) = (V - 1)\Delta x$$

Por lo tanto, la Ecuación 7 queda:

$$\frac{H_{v, y+1} - H_{v, y}}{\Delta t} = \theta^2 \frac{H_{v-1, y} - 2H_{v, y} + H_{v+1, y}}{\Delta x^2} \quad (8)$$

Si  $\beta$  es igual a:

$$\beta = \frac{\theta^2 \Delta t}{\Delta x^2}$$

Entonces:

$$H_{v, y+1} = \beta H_{v-1, y} + (1 - 2\beta)H_{v, y} + \beta H_{v+1, y} \quad (9)$$

Considerando la geometría de la ecuación y las variables, la ecuación propuesta para calcular el espaciamiento de drenes, para régimen variable y carga instantánea, es:

$$H_{o\Delta x_1} = (1 - 3.5\beta)H_{o\Delta x_{1-1}} + \beta H_{o\Delta x_{2-1}} \quad (10)$$

$$H_{o\Delta x_2} = 2\beta H_{o\Delta x_{1-1}} + (1 - 3.5\beta)H_{o\Delta x_{2-1}} \quad (11)$$

donde:  $H_{o\Delta x_1}$  = carga hidráulica a 1/4 del espaciamiento entre drenes (m) en el tiempo t;  $H_{o\Delta x_2}$  = carga hidráulica a 1/2 del espaciamiento entre drenes (m) en el tiempo t.

La  $H_{o\Delta x_2}$  es una variable conocida y para calcular la carga hidráulica inicial a 1/4 del espaciamiento entre drenes, la fórmula es:

$$H_{o\Delta x_1} = \frac{\alpha \Delta x_1 (L - \Delta x_1)}{L^2} \quad (12)$$

donde:  $H_{o\Delta x_1}$  = carga hidráulica inicial a 1/4 de L propuesta (m);  $\alpha = f(H_0)$ ; L = espaciamiento entre drenes propuesto (m);  $\Delta x_1$  = 1/4 del espaciamiento de drenes (m).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Comparación del Modelo Propuesto

Aplicando la fórmula de Glover-Dumm y el criterio de equilibrio dinámico, el espaciamiento entre drenes que satisface las exigencias del problema fue de 66 m. En el Cuadro 1 y la Figura 3 se muestra el comportamiento del nivel freático para este espaciamiento; se observa que durante todo el ciclo de riego, el nivel freático se mantuvo por debajo del NF máximo admisible, rebasando aproximadamente en 0.02 m en el noveno riego. Este valor de ascenso del nivel freático no afecta el rendimiento de los cultivos, por lo que puede considerarse satisfactorio el espaciamiento estimado por el modelo.

En las Figuras 4 y 5 se observa la variación del nivel freático de 0 a 27 días, calculado por el modelo matemático propuesto, para L = 68 m. En una forma gráfica se presenta el ascenso y descenso de NF para los diferentes intervalos de riego; el equilibrio dinámico aceptado se logrará faltando 0.038 m al nivel freático máximo posible.

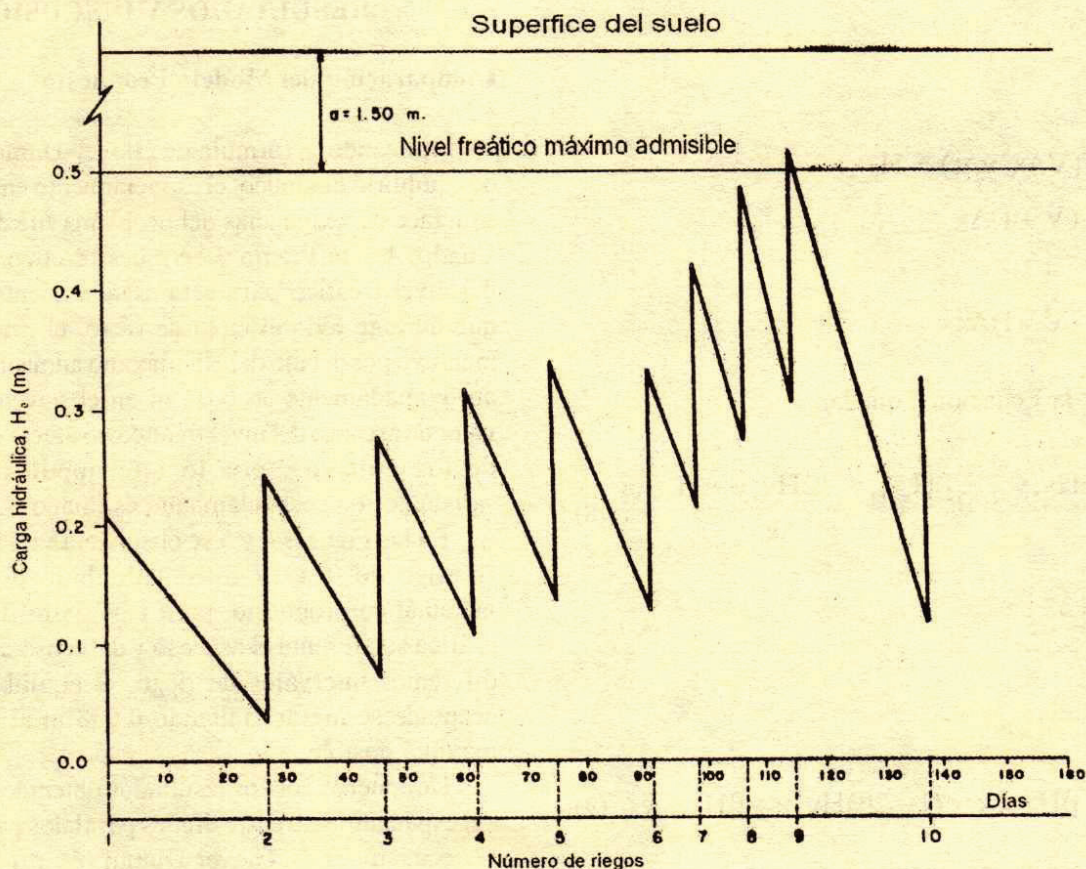
De acuerdo con los resultados obtenidos en el cálculo del espaciamiento entre drenes paralelos parcelarios con las ecuaciones de Glover-Dumm (66 m) y la obtenida con el modelo (68 m), existe una diferencia de 2 m, lo que indica que ambas ecuaciones estiman satisfactoriamente el espaciamiento entre drenes bajo el criterio del equilibrio dinámico, aplicable a áreas con proyectos de riego pre-establecidos, donde puede registrarse el historial de variación de la capa freática en tiempo y espacio.



**Cuadro 1. Oscilación del nivel freático a lo largo del ciclo de riego. Fórmula de Glover-Dumm para: L = 66 m, r = 10 cm, Do = 6 m, d = 3.69. Método del equilibrio dinámico.**

Riego	Fecha	R/μ	ti	(Ho) <sub>i</sub>	d	Di	α <sub>i</sub>	α <sub>i</sub> ti	(Ht) <sub>i</sub>
		m	días		m		días <sup>-1</sup>		m
-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
1	1 mayo	0.21	27	0.210	3.69	3.795	0.0716	1.933	0.035
2	28 mayo	0.21	19	0.245	3.69	3.812	0.0719	1.366	0.072
3	16 junio	0.21	15	0.282	3.69	3.831	0.0732	1.085	0.110
4	1 julio	0.21	14	0.320	3.69	3.850	0.0726	0.016	0.134
5	15 julio	0.21	16	0.344	3.69	3.862	0.0729	1.166	0.124
6	31 julio	0.21	8	0.344	3.69	3.857	0.0728	0.073	0.216
7	8 agosto	0.21	8	0.426	3.69	3.903	0.0735	0.589	0.274
8	16 agosto	0.21	8	0.484	3.69	3.932	0.0745	0.594	0.310
9	24 agosto	0.21	22	0.520	3.69	3.950	0.0745	1.639	0.117
10	15 sept.	0.21	0	0.369	3.69	3.853	0.0727	0	0

R/μ = percolación (m); ti = intervalo entre riegos (días); (Ho)<sub>i</sub> = (Ht)<sub>i-1</sub> + R/μ = variación del nivel freático (m); d = φ(L.D<sub>o</sub>, μ) = gráfica de V. Beers (m); Di = d + Ho<sub>i</sub> / 2 = profundidad equivalente (m); α<sub>i</sub> = (π<sup>2</sup> x Di x K) / (μ x L<sup>2</sup>), medido en días; (Ht)<sub>i</sub> = 1.16(Ho)<sub>i</sub>e<sup>-α<sub>i</sub>ti</sup>, medido en m (Glover-Dumm).



**Figura 3. Oscilación del nivel freático durante el ciclo de riego. Fórmula de Glover Dumm para L = 66 m, criterio del equilibrio dinámico.**

No obstante, debe resaltarse que cuando los espaciamientos son similares en ambos, las variaciones del nivel freático, estimadas con el método propuesto, se mantuvieron todo el ciclo vegetativo del cultivo por

debajo del NF máximo admisible. Esto es un detalle importante a considerar cuando se siembran cultivos sensibles al exceso de humedad. Además, la ecuación propuesta, a diferencia de la de Glover-Dumm, estima



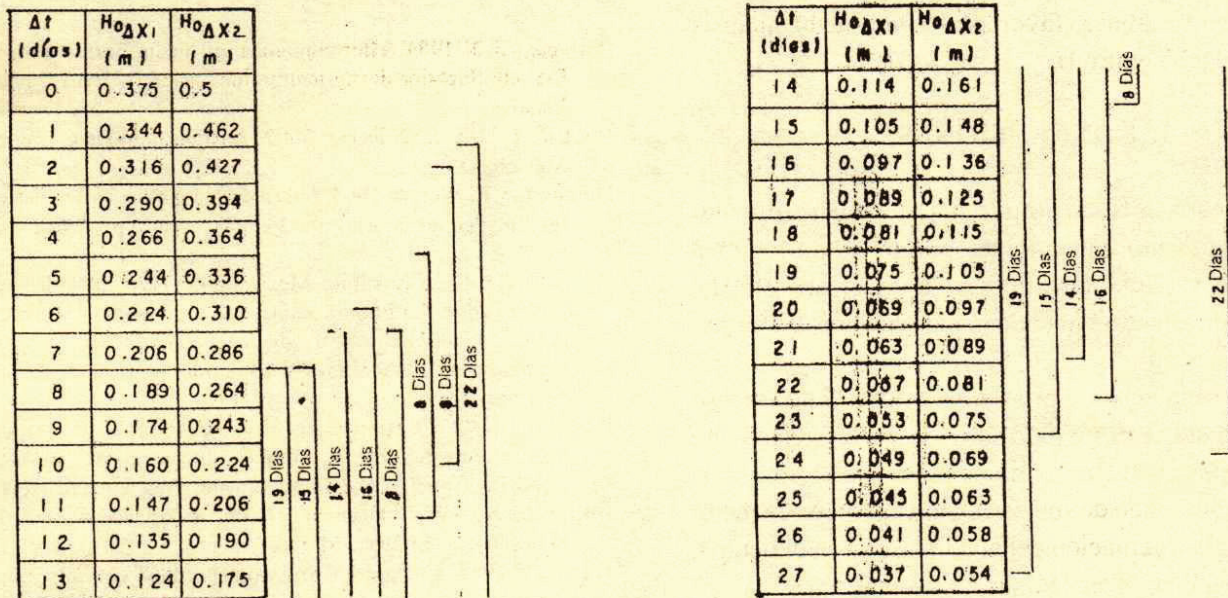


Figura 4. Cálculo de espaciamiento entre drenes. Método del equilibrio dinámico. Modelo matemático para  $L = 68$  m,  $DX_1 = 17$  m  $b = 0.021$

$$H_{oDX_1} = 0.93 H_{oDX_1-1} + 0.021 H_{oDX_2-1}$$

$$H_{oDX_2} = 0.021 H_{oDX_1-1} + 0.93 H_{oDX_2-1}$$

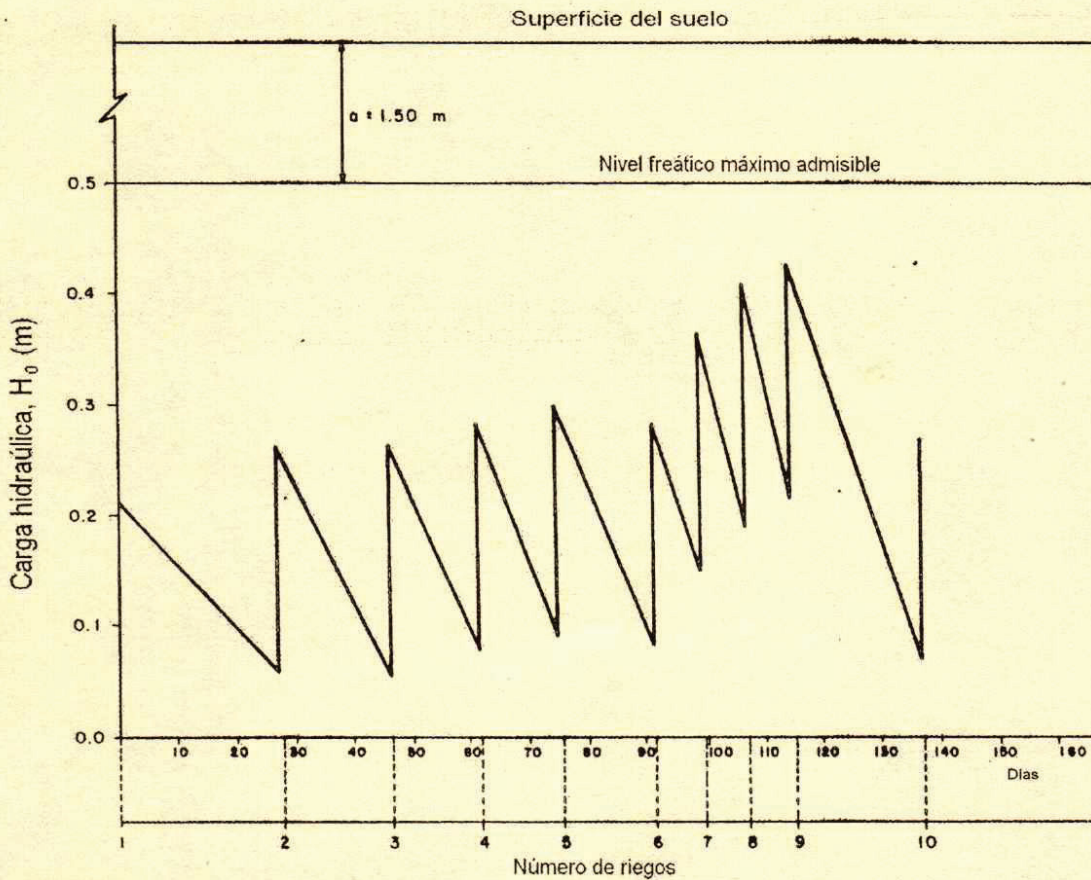


Figura 5. Oscilación del nivel freático durante el ciclo de riego. Modelo propuesto  $L = 68$  m, criterio del equilibrio dinámico.



el ascenso y descenso del nivel freático a  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{2}$  de la distancia entre drenes, favoreciendo un mejor análisis del fenómeno (Figura 4).

### CONCLUSIONES

- El modelo matemático propuesto es un buen estimador del espaciamiento entre drenes paralelos, en régimen transitorio y carga instantánea, bajo el criterio del equilibrio dinámico y validado por la ecuación de Glover-Dumm.

- El modelo matemático proporciona valores de ascenso y descenso del nivel freático a  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{2}$  del espaciamiento de los drenes en el tiempo que comprende el programa de riego o de lavado de suelos salinos, favorece un mejor análisis de la fluctuación del nivel freático en el tiempo, a diferencia de Glover-Dumm.

### LITERATURA CITADA

- Barragan, F. J. 1981. Hidrodinámica en medio poroso saturado: Escuela Superior de Agricultura de Lleida (U.P.B.) Cataluña, España.
- Burden, R. N. y J. D. Faires. 2002. Análisis numérico. Thomson. México, D. F.
- Dumm, L. y R. Winger. 1963. Subsurface drainage system designed for irrigated areas using transient flow concept. ASAE Paper 63: 213.
- IMTA-UACH-CNA (Instituto Mexicano de Tecnología del Agua-Universidad Autónoma Chapingo-Comisión Nacional del Agua). 1998. Manual de diseño e instalación de drenaje parcelario en zonas áridas y semiáridas bajo riego. Jiutepec, Morelos, México.
- Kessler, J. 1977. Criterios del drenaje agrícola. Principios y aplicaciones del drenaje. Tomo II. International Institute for Land Reclamation and Improvement. Wageningen, Holanda.
- Luthin, J.N. 1974. Drenaje de tierras agrícolas. Teoría y aplicaciones. Limusa. México, D. F.
- Pizarro, F. 1985. Drenaje agrícola y recuperación de suelos salinos. Agrícola Española. Madrid, España.
- Wesseling, J. 1978. Flujo subsuperficial de agua hacia los drenes. Vol. IV. Publicación 16. International Institute for Land Reclamation and Improvement. Wageningen, Holanda.